

Discussion Paper No. 79

連続分布の面補間における推定誤差

貞広幸雄\*

1998年12月

\*東京大学空間情報科学研究センター・工学系研究科都市工学専攻

〒113-8656 東京都文京区本郷7-3-1

Phone: 03-3812-2111 (6273)

Fax: 03-5800-6965

E-mail: sada@ua.t.u-tokyo.ac.jp

## 1. はじめに

GISにおいて用いられるデータには、行政区や学校区、メッシュといった空間単位ごとに集計されたものが少なくない。このようなデータを用いてある地区の空間解析を行う場合、解析対象地区がデータの集計地区と一致していれば良いが、実際には一致しないことが多く、そのような場合には、解析対象地区内のデータを何らかの方法で推定する必要が生ずる。このような推定の方法は面補間 (areal interpolation) と呼ばれており (Goodchild and Lam, 1980; Lam, 1983; Flowerdew and Green, 1991)、面積按分法 (Fisher and Langford, 1995)、代表点内包法 (Burrough and McDonnell, 1998)、pynophylactic法 (Tobler, 1979) などといった比較的単純な方法から、衛星画像データや土地利用データなどの補助的データを用いる方法 (Flowerdew, 1988; Goodchild et al., 1993) まで、様々な方法が提案されてきている。

しかしながら、面補間によって得られる値はあくまで推定値であり、通常は必ず何らかの誤差を含んでいる。推定誤差はその後の空間解析結果に影響を及ぼすため、面補間を行う場合には、推定誤差に対して十分配慮する必要がある。そのためGISや地理学では、様々な面補間法の比較 (Flowerdew, 1988; Flowerdew and Green, 1991; Langford et al., 1991; Fisher and Langford, 1995) や、空間単位の大きさが推定誤差に与える影響の分析 (Sadahiro, 1998a) など、推定誤差に関する研究が行われてきている。本論文はこれらの研究の延長線上に位置しており、連続分布の面補間法に関する分析を行う。連続分布とは、気温や標高といった二次元平面上において地点ごとに一意に定まる値の分布であり、人口分布のような点分布も密度が高い場合には連続分布として見なされることが多い。従来の研究は大半が点分布を対象としたものであり、連続分布は重要な空間オブジェクトであるにもかかわらずこれまでほとんど取り上げられてこなかった。特にここでは、連続分布の形状と面補間の方法の關係に着目し、それが推定誤差に与える影響を分析、面補間法の選択における指針を与えることを目標とする。

以下、2節では確率過程に基づいた面補間の推定誤差評価法を提案する。3節では、代表的ないくつかの面補間法について、推定関数と推定誤差を導出する具体的な方法を示す。4節では、面補間法と推定誤差の關係を定性的に議論する。5節では、いくつかの具体的な連続分布について、各面補間法の推定誤差を数値計算によって算出する。6節では結論と今後の課題を述べる。

## 2. 推定誤差の評価方法

面補間における推定誤差は、少なくとも 1) 元の空間集計地区 (以下、集計元地区) の形状と大きさ、2) 解析対象地区 (以下、集計先地区) の形状と大きさ、3) 集計元地区に対する集計先地区の相対的な位置、4) 連続分布の形状、5) 面補間法の5つに依存する。さらに、代表点法のような面補間法では 6) 代表点の位置も主要な要因である。そこでまず、これらの要因が全て与えられている時を想定し、集計元地区と集計先地区の重複部分における推定誤差を評価しよう。

いま、面積 $A_S$ 、周長 $L_S$ の集計元地区 $S$ を考える。この地区には、関数 $f(\mathbf{x})$ で与えられる連続分布が定義されており、その代表点の位置を $\mathbf{z}$ とおく。そして、 $S$ に少なくとも一部分が重なるように、面積 $A_T$ 、周長 $L_T$ の集計先地区 $T$ が置かれる。なお、一般には集計先地区 $T$ の大きさは集計元地区 $S$ と比べて相当程度大きいことが多い (そうでなければ推定誤差が大きくなりすぎてしまう) ので、ここでも $T$ は $S$ よりも十分大きいものと仮定しておこう。また、集計先地区 $T$ の位置を示すために二値関数

$$1(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & \text{if } \mathbf{x} \in T \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (1)$$

を定義しておく。

通常的面補間の手続きは、まず対象地域内の連続分布 $f(\mathbf{x})$ を推定し、それを対象地域内で積分する、という形で捉えることができる。例えば面積按分法は、 $f(\mathbf{x})$ を一様関数で推定し、その積分を行ったもの、と言える。そこで本論文では、面補間法を表現するために、 $f(\mathbf{x})$ の推定関数 $f(\mathbf{x})$ を採用する。例えば、面積

按分法の推定関数は一様関数，という具合である．

なお本論文では，体積保存則（volume preserving method）に基づく面補間法だけを考える（Lam, 1983）．即ち， $f(\mathbf{x})$ を $S$ における $f(\mathbf{x})$ の推定関数とすると，

$$\int_{\mathbf{x} \in S} f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int_{\mathbf{x} \in S} \hat{f}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = V \quad (2)$$

が成立するものと仮定する．この仮定は，面補間法が満たすことが望ましい条件として考えられてきており（Lam, 1983），ここでも面補間法選択の指針の一つとして採用する．

以上の設定のもとでは， $S$ と $T$ の重複部分における真の値と推定値はそれぞれ，

$$M = \int_{\mathbf{x} \in S \cap T} f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int_{\mathbf{x} \in S} f(\mathbf{x}) l(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad (3)$$

$$\hat{M} = \int_{\mathbf{x} \in S \cap T} \hat{f}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int_{\mathbf{x} \in S} \hat{f}(\mathbf{x}) l(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad (4)$$

となり，推定誤差 $\varepsilon$ は

$$\begin{aligned} \varepsilon &= M - \hat{M} \\ &= \int_{\mathbf{x} \in S} \{f(\mathbf{x}) - \hat{f}(\mathbf{x})\} l(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \end{aligned} \quad (5)$$

で与えられる．

以上のように，前述した全ての要因が与えられれば，推定誤差は簡単に求めることができる．しかしながら，そのような方法で得られる結論は所与の条件下でのみ適用可能なものであり，一般性に欠けるといふ問題点がある．そこでここでは，6つの要因のうち3) 集計先地区 $T$ の位置は確率的に定められるものとし，様々な位置における推定誤差の平均値によって評価することを考えよう．このような考え方はSadahiro (1998a, 1998b)においても見られるものであり，分析結果の適用可能性を広げる一つの方法である．具体的には，集計先地区 $T$ は少なくとも一部分が $S$ に重なるようにランダムに置かれるものとする．

この場合，推定誤差は平均二乗誤差によって評価することができる．即ち，

$$\begin{aligned} E[\varepsilon^2] &= E\left[(M - \hat{M})^2\right] \\ &= E\left[\int_{\mathbf{x} \in S} \{f(\mathbf{x}) - \hat{f}(\mathbf{x})\} l(\mathbf{x}) d\mathbf{x}\right]^2 \\ &= E\left[\int_{\mathbf{t} \in S} \int_{\mathbf{x} \in S} \{f(\mathbf{x}) - \hat{f}(\mathbf{x})\} \{f(\mathbf{t}) - \hat{f}(\mathbf{t})\} l(\mathbf{x}) l(\mathbf{t}) d\mathbf{x} d\mathbf{t}\right]^2 \\ &= \int_{\mathbf{t} \in S} \int_{\mathbf{x} \in S} E[l(\mathbf{x}) l(\mathbf{t})] \{f(\mathbf{x}) - \hat{f}(\mathbf{x})\} \{f(\mathbf{t}) - \hat{f}(\mathbf{t})\} d\mathbf{x} d\mathbf{t} \\ &= \int_{\mathbf{t} \in S} \int_{\mathbf{x} \in S} \Pr[\mathbf{x} \cup \mathbf{t} \in T] \{f(\mathbf{x}) - \hat{f}(\mathbf{x})\} \{f(\mathbf{t}) - \hat{f}(\mathbf{t})\} d\mathbf{x} d\mathbf{t} \end{aligned} \quad (6)$$

である．但し，

$$\Pr[\mathbf{x} \cup \mathbf{t} \in T] = \frac{m(T; \mathbf{x} - \mathbf{t})}{m(T; S \cap T \neq \emptyset)} \quad (7)$$

であり，分子は距離が $|\mathbf{x} - \mathbf{t}|$ だけ離れた2点を内包する $T$ と合同な全ての図形の集合の測度，分母は $T$ と少なくとも一部分重なる $T$ と合同な全ての図形の集合の測度である．但し， $T$ が $S$ と比べてある程度大きい場合（詳しくはStoyan and Stoyan (1994)参照）には，

$$m(T; \mathbf{x} - \mathbf{t}) \approx 2\pi A_T - 2L_T |\mathbf{x} - \mathbf{t}| \quad (8)$$

という近似が成立する．式7及び8を式6に代入すると，

$$\begin{aligned}
E[\varepsilon^2] &= \frac{1}{m'(T; S \cap T \neq \emptyset)} \int_{t \in S} \int_{x \in S} m(T; |\mathbf{x} - \mathbf{t}|) \{f(\mathbf{x}) - \hat{f}(\mathbf{x})\} \{f(\mathbf{t}) - \hat{f}(\mathbf{t})\} dx dt \\
&\approx \frac{1}{m'(T; S \cap T \neq \emptyset)} \int_{t \in S} \int_{x \in S} (2\pi A_T - 2L_T |\mathbf{x} - \mathbf{t}|) \{f(\mathbf{x}) - \hat{f}(\mathbf{x})\} \{f(\mathbf{t}) - \hat{f}(\mathbf{t})\} dx dt \\
&= \frac{2\pi A_T}{m'(T; S \cap T \neq \emptyset)} \int_{t \in S} \int_{x \in S} \{f(\mathbf{x}) - \hat{f}(\mathbf{x})\} \{f(\mathbf{t}) - \hat{f}(\mathbf{t})\} dx dt \\
&\quad - \frac{2L_T}{m'(T; S \cap T \neq \emptyset)} \int_{t \in S} \int_{x \in S} |\mathbf{x} - \mathbf{t}| \{f(\mathbf{x}) - \hat{f}(\mathbf{x})\} \{f(\mathbf{t}) - \hat{f}(\mathbf{t})\} dx dt \\
&= \frac{2\pi A_T}{m'(T; S \cap T \neq \emptyset)} \int_{t \in S} \{f(\mathbf{t}) - \hat{f}(\mathbf{t})\} dt \int_{x \in S} \{f(\mathbf{x}) - \hat{f}(\mathbf{x})\} dx \\
&\quad - \frac{2L_T}{m'(T; S \cap T \neq \emptyset)} \int_{t \in S} \int_{x \in S} |\mathbf{x} - \mathbf{t}| \{f(\mathbf{x}) - \hat{f}(\mathbf{x})\} \{f(\mathbf{t}) - \hat{f}(\mathbf{t})\} dx dt \\
&= -\frac{2L_T}{m'(T; S \cap T \neq \emptyset)} \int_{t \in S} \int_{x \in S} |\mathbf{x} - \mathbf{t}| \{f(\mathbf{x}) - \hat{f}(\mathbf{x})\} \{f(\mathbf{t}) - \hat{f}(\mathbf{t})\} dx dt
\end{aligned} \tag{9}$$

を得る．ここで， $S$ 及び $T$ は所与であることを考え，式9のうち面補間法の評価に影響する部分のみを取り出す．即ち，

$$I_\varepsilon = -\int_{t \in S} \int_{x \in S} |\mathbf{x} - \mathbf{t}| \{f(\mathbf{x}) - \hat{f}(\mathbf{x})\} \{f(\mathbf{t}) - \hat{f}(\mathbf{t})\} dx dt \tag{10}$$

とし，この $I_\varepsilon$ （以下，推定誤差と呼ぶ）を用いて推定誤差の評価を進めることにしよう．

### 3. 様々な補間法における推定関数と推定誤差

前節では，推定関数を用いて推定誤差を表現する方法を提案した．推定関数が与えられれば，式10を用いて推定誤差 $I_\varepsilon$ を計算することができる．そこで本節では，実際にいくつかの代表的な面補間法について，推定関数の具体的な表現を行い，推定誤差の計算方法を説明する．

#### 3.1 面積按分法 (areal weighting interpolation)

面積按分法では，領域内の $f(\mathbf{x})$ の値は一定であると仮定する．即ち，

$$\hat{f}(\mathbf{x}) = \frac{V}{A_S} \tag{11}$$

である．従って，式11を式10に代入し，

$$\begin{aligned}
I_\varepsilon &= -\int_{t \in S} \int_{x \in S} |\mathbf{x} - \mathbf{t}| \left\{ f(\mathbf{x}) - \frac{V}{A_S} \right\} \left\{ f(\mathbf{t}) - \frac{V}{A_S} \right\} dx dt \\
&= -\int_{t \in S} \int_{x \in S} |\mathbf{x} - \mathbf{t}| f(\mathbf{x}) f(\mathbf{t}) dx dt \\
&\quad + \frac{2V}{A_S} \int_{t \in S} f(\mathbf{t}) \int_{x \in S} |\mathbf{x} - \mathbf{t}| dx dt \\
&\quad - \left( \frac{V}{A_S} \right)^2 \int_{t \in S} \int_{x \in S} |\mathbf{x} - \mathbf{t}| dx dt \\
&= -\int_{t \in S} \int_{x \in S} |\mathbf{x} - \mathbf{t}| f(\mathbf{x}) f(\mathbf{t}) dx dt + \frac{2V}{A_S} \int_{t \in S} f(\mathbf{t}) \int_{x \in S} |\mathbf{x} - \mathbf{t}| dx dt - V^2 D(S)
\end{aligned} \tag{12}$$

となる．但し， $D(S)$ は $S$ において適当に2点をとったときの2点間距離の平均値を表す．

#### 3.2 代表点内包法 (point-in-polygon method)

代表点内包法における推定関数  $f(\mathbf{x})$  は、代表点の位置でのみ正の値を持ち、他の全ての位置では0にある。この場合、 $I_\varepsilon$  は以下のように求めることができる。

いま、代表点  $\mathbf{z}$  を中心とする半径  $r$  の円領域  $C(\mathbf{z}, r)$  を考えよう。そして、推定関数を仮に以下のように定める。

$$\hat{f}(\mathbf{x}) = \begin{cases} \frac{V}{\pi r^2} & \mathbf{x} \in C(\mathbf{z}, r) \\ 0 & \mathbf{x} \notin C(\mathbf{z}, r) \end{cases} \quad (13)$$

するとこの場合、 $I_\varepsilon$  は

$$\begin{aligned} I'_\varepsilon &= -\int_{\mathbf{t} \in S} \int_{\mathbf{x} \in S} |\mathbf{x} - \mathbf{t}| \{f(\mathbf{x}) - \hat{f}(\mathbf{x})\} \{f(\mathbf{t}) - \hat{f}(\mathbf{t})\} d\mathbf{x} d\mathbf{t} \\ &= -\int_{\mathbf{t} \in S} \int_{\mathbf{x} \in S} |\mathbf{x} - \mathbf{t}| f(\mathbf{x}) f(\mathbf{t}) d\mathbf{x} d\mathbf{t} \\ &\quad + \frac{2V}{\pi r^2} \int_{\mathbf{t} \in C(\mathbf{z}, r)} \int_{\mathbf{x} \in S} |\mathbf{x} - \mathbf{t}| f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} d\mathbf{t} \\ &\quad - \left(\frac{V}{\pi r^2}\right)^2 \int_{\mathbf{t} \in C(\mathbf{z}, r)} \int_{\mathbf{x} \in C(\mathbf{z}, r)} |\mathbf{x} - \mathbf{t}| d\mathbf{x} d\mathbf{t} \\ &= -\int_{\mathbf{t} \in S} \int_{\mathbf{x} \in S} |\mathbf{x} - \mathbf{t}| f(\mathbf{x}) f(\mathbf{t}) d\mathbf{x} d\mathbf{t} + \frac{2V}{\pi r^2} \int_{\mathbf{t} \in C(\mathbf{z}, r)} \int_{\mathbf{x} \in S} |\mathbf{x} - \mathbf{t}| f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} d\mathbf{t} - V^2 D(C(\mathbf{z}, r)) \end{aligned} \quad (14)$$

となる。ここで、 $D(C(\mathbf{z}, r))$  は具体的に以下のように表される（腰塚, 1978）。

$$D(C(\mathbf{z}, r)) = \frac{128}{45\pi} r \quad (15)$$

式15を14に代入すると、

$$I'_\varepsilon = -\int_{\mathbf{t} \in S} \int_{\mathbf{x} \in S} |\mathbf{x} - \mathbf{t}| f(\mathbf{x}) f(\mathbf{t}) d\mathbf{x} d\mathbf{t} + \frac{2V}{\pi r^2} \int_{\mathbf{t} \in C(\mathbf{z}, r)} \int_{\mathbf{x} \in S} |\mathbf{x} - \mathbf{t}| f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} d\mathbf{t} - \frac{128}{45\pi} r V^2 \quad (16)$$

を得る。ここで、円領域  $C(\mathbf{z}, r)$  の半径  $r$  を0としたときの極限值が代表点内包法における  $I_\varepsilon$  となる。従って、

$$\begin{aligned} I_\varepsilon &= \lim_{r \rightarrow 0} I'_\varepsilon \\ &= -\int_{\mathbf{t} \in S} \int_{\mathbf{x} \in S} |\mathbf{x} - \mathbf{t}| f(\mathbf{x}) f(\mathbf{t}) d\mathbf{x} d\mathbf{t} + \frac{2V}{\pi} \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{r^2} \int_{\mathbf{t} \in C(\mathbf{z}, r)} \int_{\mathbf{x} \in S} |\mathbf{x} - \mathbf{t}| f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} d\mathbf{t} \\ &= -\int_{\mathbf{t} \in S} \int_{\mathbf{x} \in S} |\mathbf{x} - \mathbf{t}| f(\mathbf{x}) f(\mathbf{t}) d\mathbf{x} d\mathbf{t} + \frac{2V}{\pi} \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{r^2} \pi r^2 \int_{\mathbf{x} \in S} |\mathbf{x} - \mathbf{z}| f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \\ &= -\int_{\mathbf{t} \in S} \int_{\mathbf{x} \in S} |\mathbf{x} - \mathbf{t}| f(\mathbf{x}) f(\mathbf{t}) d\mathbf{x} d\mathbf{t} + 2V \int_{\mathbf{x} \in S} |\mathbf{x} - \mathbf{z}| f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \end{aligned} \quad (17)$$

となる。

### 3.3 円錐法 (cone method, kernel method)

円錐法とは、領域  $S$  の代表点  $\mathbf{z}$  を頂点とする円錐（あるいはその一部）によって、 $f(\mathbf{x})$  を近似する方法である。この方法は、代表点の位置が連続分布に対して何らかの代表性を持っているときに用いられるものであり、カーネル法による面補間において、円錐をカーネルとして用いる場合などがこれに相当する。また、Bracken and Martin (1989) や Bracken (1993), Bracken and Martin (1995) などに用いられている方法も円錐法に極めてよく似ている。

円錐法における推定関数  $f(\mathbf{x})$  は、稜線の傾き  $\lambda$  を所与として、以下のように表すことができる。

$$\hat{f}(\mathbf{x}) = \begin{cases} H - \lambda |\mathbf{x} - \mathbf{z}| & \text{if } |\mathbf{x} - \mathbf{z}| \leq \frac{H}{\lambda} \\ 0 & \text{if } |\mathbf{x} - \mathbf{z}| > \frac{H}{\lambda} \end{cases} \quad (18)$$

但し、 $H$  は円錐の高さであり、この値は体積保存則に基づいて定めなければならない。その具体的な方法は以下の通りである。いま、 $S$  において代表点  $\mathbf{z}$  から最も遠い点  $P$  までの距離を  $L_{\max}$  とおく。そして、点  $P$  に

おける推定関数 $f(\mathbf{x})$ の値の正負を考えよう．そのためには，

$$H = \lambda L_{\max} \quad (19)$$

のときの

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{x} \in S} \hat{f}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} &= \int_{\mathbf{x} \in S} (H - \lambda |\mathbf{x} - \mathbf{z}|) d\mathbf{x} \\ &= HA_S - \lambda \int_{\mathbf{x} \in S} |\mathbf{x} - \mathbf{z}| d\mathbf{x} \\ &= \lambda \left( L_{\max} A_S - \int_{\mathbf{x} \in S} |\mathbf{x} - \mathbf{z}| d\mathbf{x} \right) \end{aligned} \quad (20)$$

の値を $V$ と比較すればよい．即ち，

$$\lambda \left( L_{\max} A_S - \int_{\mathbf{x} \in S} |\mathbf{x} - \mathbf{z}| d\mathbf{x} \right) < V \quad (21)$$

であれば点 $P$ における推定関数 $f(\mathbf{x})$ の値は正，そうでなければ0になる．前者の場合，

$$\lambda \left( L_{\max} A_S - \int_{\mathbf{x} \in S} |\mathbf{x} - \mathbf{z}| d\mathbf{x} \right) + (H - \lambda L_{\max}) A_S = V \quad (22)$$

より， $H$ は

$$H = \frac{1}{A_S} \left( V + \lambda \int_{\mathbf{x} \in S} |\mathbf{x} - \mathbf{z}| d\mathbf{x} \right) \quad (23)$$

となる．後者，即ち，

$$\lambda \left( L_{\max} A_S - \int_{\mathbf{x} \in S} |\mathbf{x} - \mathbf{z}| d\mathbf{x} \right) \geq V \quad (24)$$

の場合には，

$$\int_{\mathbf{x} \in S \cap C\left(\mathbf{z}, \frac{H}{\lambda}\right)} (H - \lambda |\mathbf{x} - \mathbf{z}|) d\mathbf{x} = V \quad (25)$$

となるような $H$ を数値計算によって算出する．

上の結果をまとめると以下ようになる．

$$\begin{aligned} \text{if} \quad & \lambda \left( L_{\max} A_S - \int_{\mathbf{x} \in S} |\mathbf{x} - \mathbf{z}| d\mathbf{x} \right) < V \\ \text{then} \quad & \hat{f}(\mathbf{x}) = \frac{1}{A_S} \left( V + \lambda \int_{\mathbf{x} \in S} |\mathbf{x} - \mathbf{z}| d\mathbf{x} \right) - \lambda |\mathbf{x} - \mathbf{z}| \end{aligned} \quad (26)$$

及び，

$$\begin{aligned} \text{if} \quad & \lambda \left( L_{\max} A_S - \int_{\mathbf{x} \in S} |\mathbf{x} - \mathbf{z}| d\mathbf{x} \right) \geq V \\ \text{then} \quad & \hat{f}(\mathbf{x}) = \begin{cases} H - \lambda |\mathbf{x} - \mathbf{z}| & \text{if } |\mathbf{x} - \mathbf{z}| \leq \frac{H}{\lambda} \\ 0 & \text{if } |\mathbf{x} - \mathbf{z}| > \frac{H}{\lambda} \end{cases} . \end{aligned} \quad (27)$$

但し， $H$ は

$$\int_{\mathbf{x} \in S \cap C\left(\mathbf{z}, \frac{H}{\lambda}\right)} (H - \lambda |\mathbf{x} - \mathbf{z}|) d\mathbf{x} = V \quad (28)$$

を満たすものとする．このように定義される推定関数 $f(\mathbf{x})$ を式10に代入すれば，推定誤差 $I_e$ が得られる．

### 3.4 補助データ法 (dasyymmetric method)

近年では衛星画像データを初めとする空間データの利用可能性が広がり，連続分布の推定に他の補助的なデータを用いる方法が数多く開発されつつある (Flowerdew, 1988; Langford *et al.*, 1991; Goodchild *et al.*, 1993; Fisher and Langford, 1995)．それらは極めて多様であるので，ここではその典型的な例について推定関数，推定誤差の考え方を説明する．

いま，人口分布を土地利用データに基づいて推定することを考えてみよう．土地利用データを見ると，

人間が住んでいる地域（住居系土地利用）と住んでいない地域（その他の土地利用）をほぼ区別することができる。そこで、人間が住んでいる地域では人口分布が一様であると仮定して、地域内の合計値をその中だけで一様分布により推定することがある。あるいは住居系土地利用が更にその密度によって何段階か（例えば、低密度住居地域、中密度住居地域、高密度住居地域）に分類できるときには、各々の密度に応じた合計値の配分を行う。

このような推定では、補助データは $S$ の空間的な位置 $\mathbf{x}$ に対して一意に定められている。そこで今、補助データを表す補助関数 $\varphi(\mathbf{x})$ を導入しよう。この関数は例えば、住居系土地利用地域では1、そうでない地域では0をとるような関数である。すると、連続分布 $f(\mathbf{x})$ の推定関数 $\hat{f}(\mathbf{x})$ は

$$\hat{f}(\mathbf{x}) = \frac{\varphi(\mathbf{x})}{\int_{\mathbf{x} \in S} \varphi(\mathbf{x}) d\mathbf{x}} V \quad (29)$$

と表すことができる。ここで、

$$K = \int_{\mathbf{x} \in S} \varphi(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad (30)$$

とおくと、推定誤差 $I_\varepsilon$ は

$$\begin{aligned} I_\varepsilon &= \int_{\mathbf{t} \in S} \int_{\mathbf{x} \in S} |\mathbf{x} - \mathbf{t}| \{f(\mathbf{x}) - \hat{f}(\mathbf{x})\} \{f(\mathbf{t}) - \hat{f}(\mathbf{t})\} d\mathbf{x} d\mathbf{t} \\ &= \int_{\mathbf{t} \in S} \int_{\mathbf{x} \in S} |\mathbf{x} - \mathbf{t}| f(\mathbf{x}) f(\mathbf{t}) d\mathbf{x} d\mathbf{t} - 2 \int_{\mathbf{t} \in S} \int_{\mathbf{x} \in S} |\mathbf{x} - \mathbf{t}| f(\mathbf{x}) \hat{f}(\mathbf{t}) d\mathbf{x} d\mathbf{t} + \int_{\mathbf{t} \in S} \int_{\mathbf{x} \in S} |\mathbf{x} - \mathbf{t}| \hat{f}(\mathbf{x}) \hat{f}(\mathbf{t}) d\mathbf{x} d\mathbf{t} \\ &= \int_{\mathbf{t} \in S} \int_{\mathbf{x} \in S} |\mathbf{x} - \mathbf{t}| f(\mathbf{x}) f(\mathbf{t}) d\mathbf{x} d\mathbf{t} - \frac{2V}{K} \int_{\mathbf{t} \in S} \varphi(\mathbf{t}) \int_{\mathbf{x} \in S} |\mathbf{x} - \mathbf{t}| f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} d\mathbf{t} + \left(\frac{V}{K}\right)^2 \int_{\mathbf{t} \in S} \int_{\mathbf{x} \in S} |\mathbf{x} - \mathbf{t}| \varphi(\mathbf{x}) \varphi(\mathbf{t}) d\mathbf{x} d\mathbf{t} \end{aligned} \quad (31)$$

となる。

補助データ法の場合、補助関数 $\varphi(\mathbf{x})$ の形が推定誤差に大きく影響する。この関数の形として最も簡単なのは以下のような二値関数であろう。

$$\varphi(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & \text{if } f(\mathbf{x}) \geq \alpha \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (32)$$

人口分布の例で言えば、一定密度以上の人口を有する地域は検出できるが、非常に人口の少ない地域は検出できない、ということが（特に衛星画像を用いた場合）よく起こる。このような場合、面補間では、式32のような補助関数がいられることになる。あるいは、前述のように人口密度が何段階かに区別できるときには、

$$\varphi(\mathbf{x}) = \begin{cases} a_1 & \text{if } f(\mathbf{x}) \geq \alpha_1 \\ a_2 & \text{if } \alpha_1 > f(\mathbf{x}) \geq \alpha_2 \\ a_3 & \text{if } \alpha_2 > f(\mathbf{x}) \geq \alpha_3 \\ a_4 & \text{if } \alpha_3 > f(\mathbf{x}) \end{cases} \quad (33)$$

のような階段関数の場合も有り得る。もちろん、補助関数 $\varphi(\mathbf{x})$ を $f(\mathbf{x})$ の連続関数として与えることも可能であり、例えばいくつかの変数の線形結合として $\varphi(\mathbf{x})$ を記述している例がある（Goodchild et al., 1993）。

#### 4. 面補間法と推定誤差の関係

前節までの議論から、様々な場合における推定誤差を算出する具体的な方法が得られる。即ち、 $S$ 、 $T$ 、 $f(\mathbf{x})$ 、 $\hat{f}(\mathbf{x})$ が与えられれば、面補間法と推定誤差の関係を実際に分析することが可能である。もちろん、 $f(\mathbf{x})$ 及び $\hat{f}(\mathbf{x})$ の関数形によって計算の程度は異なるが、最悪でも式10に対して数値積分を用いれば推定誤差の評価が可能である。しかし、数値計算だけでは、推定誤差がどのような要因によって大きく影響されるのか、ということ直観的に理解することが難しい。そこでここでは、式10に基づいて、面補間法と推定誤差の関係を定性的に議論する。なお、予め誤差関数 $\Delta f(\mathbf{x})$ を以下の式で定義する。

$$\Delta f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) - \hat{f}(\mathbf{x}) \quad (34)$$

すると、式10は

$$I_\varepsilon = - \int_{\mathbf{t} \in S} \int_{\mathbf{x} \in S} |\mathbf{x} - \mathbf{t}| \Delta f(\mathbf{x}) \Delta f(\mathbf{t}) d\mathbf{x} d\mathbf{t} \quad (35)$$

となる。

まず、誤差関数 $\Delta f(x)$ の大きさと推定誤差の関係を考えてみよう。例えば、 $\Delta f(x)$ が2倍になれば推定誤差 $I_e$ はどのように変化するであろうか（図1）。この関係は直観的に明らかであり、誤差関数の絶対値が大きくなれば推定誤差も大きくなる。式35より、 $\Delta f(x)$ が2倍になれば $I_e$ が4倍となることが直ちに示される。これは、各地点における推定誤差が小さくなれば、集計先領域 $T$ における推定誤差も小さくなるということを意味している。

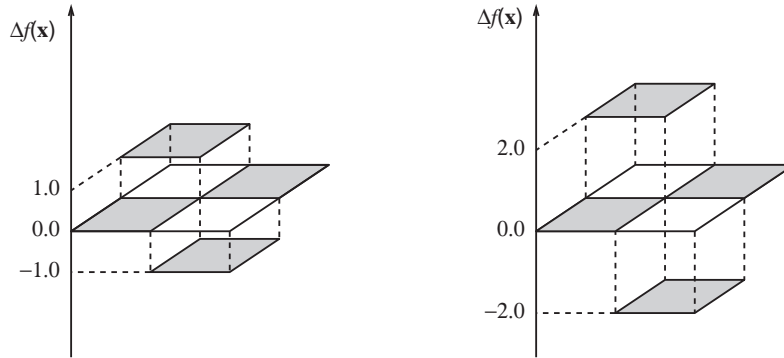


図1 大きさの異なる誤差関数

次に、誤差関数 $\Delta f(x)$ のばらつき具合と推定誤差の関係を考えてみよう。例えば図2のように、誤差関数の絶対値の総和が等しい場合、推定誤差はどちらの方が大きいであろうか。

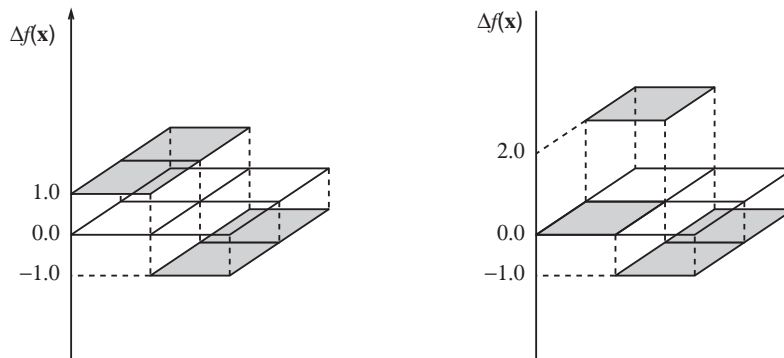


図2 大きさが等しく絶対値の異なる誤差関数

このように、誤差関数の絶対値の総和が一定であるとき、どのような誤差分布が望ましいのか、という問題については、以下のように考えることができる。いま、集計元地区 $S$ の中に含まれる近接した合同な二つの微小地区 $S_1$ と $S_2$ を考えよう。簡単のために、これらの地区では、誤差関数 $\Delta f(x)$ の値はそれぞれ一定であるものとし、各々の値を $f_1$ と $f_2$ とする（但し、いずれも正であるものとする）。このとき、推定誤差 $I_e$ は以下のように表される。



$$\begin{aligned}
I_\varepsilon &= -\int_{t \in S} \int_{x \in S} |\mathbf{x} - \mathbf{t}| \Delta f(\mathbf{x}) \Delta f(\mathbf{t}) dx dt \\
&= -\int_{t \in S \setminus (S_1 \cup S_2)} \int_{x \in S \setminus (S_1 \cup S_2)} |\mathbf{x} - \mathbf{t}| \Delta f(\mathbf{x}) \Delta f(\mathbf{t}) dx dt \\
&\quad -2 \int_{t \in S \setminus (S_1 \cup S_2)} \int_{x \in S_1} |\mathbf{x} - \mathbf{t}| \Delta f(\mathbf{x}) \Delta f(\mathbf{t}) dx dt \\
&\quad -2 \int_{t \in S \setminus (S_1 \cup S_2)} \int_{x \in S_2} |\mathbf{x} - \mathbf{t}| \Delta f(\mathbf{x}) \Delta f(\mathbf{t}) dx dt \\
&\quad -\int_{t \in S_1} \int_{x \in S_1} |\mathbf{x} - \mathbf{t}| \Delta f(\mathbf{x}) \Delta f(\mathbf{t}) dx dt \\
&\quad -2 \int_{t \in S_1} \int_{x \in S_2} |\mathbf{x} - \mathbf{t}| \Delta f(\mathbf{x}) \Delta f(\mathbf{t}) dx dt \\
&\quad -\int_{t \in S_2} \int_{x \in S_2} |\mathbf{x} - \mathbf{t}| \Delta f(\mathbf{x}) \Delta f(\mathbf{t}) dx dt
\end{aligned} \tag{36}$$

この式を変形すると，

$$\begin{aligned}
I_\varepsilon &= -\int_{t \in S \setminus (S_1 \cup S_2)} \int_{x \in S \setminus (S_1 \cup S_2)} |\mathbf{x} - \mathbf{t}| \Delta f(\mathbf{x}) \Delta f(\mathbf{t}) dx dt \\
&\quad -2f_1 \int_{t \in S \setminus (S_1 \cup S_2)} \Delta f(\mathbf{t}) \int_{x \in S_1} |\mathbf{x} - \mathbf{t}| dx dt \\
&\quad -2f_2 \int_{t \in S \setminus (S_1 \cup S_2)} \Delta f(\mathbf{t}) \int_{x \in S_2} |\mathbf{x} - \mathbf{t}| dx dt \\
&\quad -f_1^2 \int_{t \in S_1} \int_{x \in S_1} |\mathbf{x} - \mathbf{t}| dx dt - 2f_1 f_2 \int_{t \in S_1} \int_{x \in S_2} |\mathbf{x} - \mathbf{t}| dx dt - f_2^2 \int_{t \in S_2} \int_{x \in S_2} |\mathbf{x} - \mathbf{t}| dx dt
\end{aligned} \tag{37}$$

となる．

ここで，地区 $S_1$ と $S_2$ における誤差関数の値 $f_1$ と $f_2$ がどのようなときに推定誤差 $I_\varepsilon$ が小さくなるか，という問題を考えよう．誤差関数の絶対値の総和は一定であると仮定しているので，

$$f_1 + f_2 = f_0 \tag{38}$$

とおくことができる．すると式37は，

$$\begin{aligned}
I_\varepsilon &= -\int_{t \in S \setminus (S_1 \cup S_2)} \int_{x \in S \setminus (S_1 \cup S_2)} |\mathbf{x} - \mathbf{t}| \Delta f(\mathbf{x}) \Delta f(\mathbf{t}) dx dt \\
&\quad -2f_1 \int_{t \in S \setminus (S_1 \cup S_2)} \Delta f(\mathbf{t}) \int_{x \in S_1} |\mathbf{x} - \mathbf{t}| dx dt \\
&\quad -2(f_0 - f_1) \int_{t \in S \setminus (S_1 \cup S_2)} \Delta f(\mathbf{t}) \int_{x \in S_2} |\mathbf{x} - \mathbf{t}| dx dt \\
&\quad -f_1^2 \int_{t \in S_1} \int_{x \in S_1} |\mathbf{x} - \mathbf{t}| dx dt - 2f_1(f_0 - f_1) \int_{t \in S_1} \int_{x \in S_2} |\mathbf{x} - \mathbf{t}| dx dt - (f_0 - f_1)^2 \int_{t \in S_2} \int_{x \in S_2} |\mathbf{x} - \mathbf{t}| dx dt \\
&= \left\{ 2 \int_{t \in S_1} \int_{x \in S_2} |\mathbf{x} - \mathbf{t}| dx dt - \int_{t \in S_2} \int_{x \in S_2} |\mathbf{x} - \mathbf{t}| dx dt - \int_{t \in S_1} \int_{x \in S_1} |\mathbf{x} - \mathbf{t}| dx dt \right\} f_1^2 \\
&\quad + \left\{ \begin{aligned} &2 \int_{t \in S \setminus (S_1 \cup S_2)} \Delta f(\mathbf{t}) \int_{x \in S_2} |\mathbf{x} - \mathbf{t}| dx dt - 2 \int_{t \in S \setminus (S_1 \cup S_2)} \Delta f(\mathbf{t}) \int_{x \in S_1} |\mathbf{x} - \mathbf{t}| dx dt \\ &-2f_0 \int_{t \in S_1} \int_{x \in S_2} |\mathbf{x} - \mathbf{t}| dx dt + 2f_0 \int_{t \in S_2} \int_{x \in S_2} |\mathbf{x} - \mathbf{t}| dx dt \end{aligned} \right\} f_1 \\
&\quad -\int_{t \in S \setminus (S_1 \cup S_2)} \int_{x \in S \setminus (S_1 \cup S_2)} |\mathbf{x} - \mathbf{t}| \Delta f(\mathbf{x}) \Delta f(\mathbf{t}) dx dt - f_0^2 \int_{t \in S_2} \int_{x \in S_2} |\mathbf{x} - \mathbf{t}| dx dt
\end{aligned} \tag{39}$$

となる．この式は $f_1$ の2次式であり，その最小値を与える $f_1$ を容易に求めることができる．即ち，

$$f_1 = -\frac{2 \int_{t \in S \setminus (S_1 \cup S_2)} \Delta f(\mathbf{t}) \int_{x \in S_2} |\mathbf{x} - \mathbf{t}| dx dt - 2 \int_{t \in S \setminus (S_1 \cup S_2)} \Delta f(\mathbf{t}) \int_{x \in S_1} |\mathbf{x} - \mathbf{t}| dx dt - 2f_0 \int_{t \in S_1} \int_{x \in S_2} |\mathbf{x} - \mathbf{t}| dx dt + 2f_0 \int_{t \in S_2} \int_{x \in S_2} |\mathbf{x} - \mathbf{t}| dx dt}{4 \int_{t \in S_1} \int_{x \in S_2} |\mathbf{x} - \mathbf{t}| dx dt - 2 \int_{t \in S_2} \int_{x \in S_2} |\mathbf{x} - \mathbf{t}| dx dt - 2 \int_{t \in S_1} \int_{x \in S_1} |\mathbf{x} - \mathbf{t}| dx dt} \tag{40}$$

のとき，推定誤差 $I_\varepsilon$ は最小となる．ここで，二つの地区が合同であることを考慮すると，式40は

$$\begin{aligned}
f_1 &= -\frac{2\int_{t \in S \setminus (S_1 \cup S_2)} \Delta f(t) \int_{x \in S_2} |x-t| dx dt - 2\int_{t \in S \setminus (S_1 \cup S_2)} \Delta f(t) \int_{x \in S_1} |x-t| dx dt - 2f_0 \int_{t \in S_1} \int_{x \in S_2} |x-t| dx dt + 2f_0 \int_{t \in S_2} \int_{x \in S_1} |x-t| dx dt}{4\int_{t \in S_1} \int_{x \in S_2} |x-t| dx dt - 4\int_{t \in S_2} \int_{x \in S_1} |x-t| dx dt} \\
&= -\frac{\int_{t \in S \setminus (S_1 \cup S_2)} \Delta f(t) \int_{x \in S_2} |x-t| dx dt - \int_{t \in S \setminus (S_1 \cup S_2)} \Delta f(t) \int_{x \in S_1} |x-t| dx dt - f_0 \int_{t \in S_1} \int_{x \in S_2} |x-t| dx dt + f_0 \int_{t \in S_2} \int_{x \in S_1} |x-t| dx dt}{2\int_{t \in S_1} \int_{x \in S_2} |x-t| dx dt - 2\int_{t \in S_2} \int_{x \in S_1} |x-t| dx dt}
\end{aligned} \tag{41}$$

となる。また、二つの地区は近接しているので、

$$\int_{t \in S \setminus (S_1 \cup S_2)} \Delta f(t) \int_{x \in S_2} |x-t| dx dt \approx \int_{t \in S \setminus (S_1 \cup S_2)} \Delta f(t) \int_{x \in S_1} |x-t| dx dt \tag{42}$$

とほぼ考えて良く、式41は最終的に

$$\begin{aligned}
f_1 &\approx \frac{f_0 \int_{t \in S_1} \int_{x \in S_2} |x-t| dx dt - f_0 \int_{t \in S_2} \int_{x \in S_1} |x-t| dx dt}{2\int_{t \in S_1} \int_{x \in S_2} |x-t| dx dt - 2\int_{t \in S_2} \int_{x \in S_1} |x-t| dx dt} \\
&= \frac{f_0}{2}
\end{aligned} \tag{43}$$

となる。即ち、近接した合同な微小地区 $S_1$ と $S_2$ の誤差関数を考えた場合、それぞれの値が等しい時に、推定誤差 $I_e$ が最小となることが分かる。

このような考え方を繰り返し適用すると、誤差関数の絶対値の総和が一定であるときには、その値が一定に近いほど推定誤差 $I_e$ が小さくなるということがわかる。即ち、推定関数はできるだけ一様に近い方が誤差が小さく、そのような推定関数を持つ補間法が望ましい、ということである。

それでは、誤差関数の空間的な分布と推定誤差 $I_e$ の関係はどのようにになっているのであろうか。例えば、図3の2つの分布の間で、推定誤差がどのように異なるのであろうか。

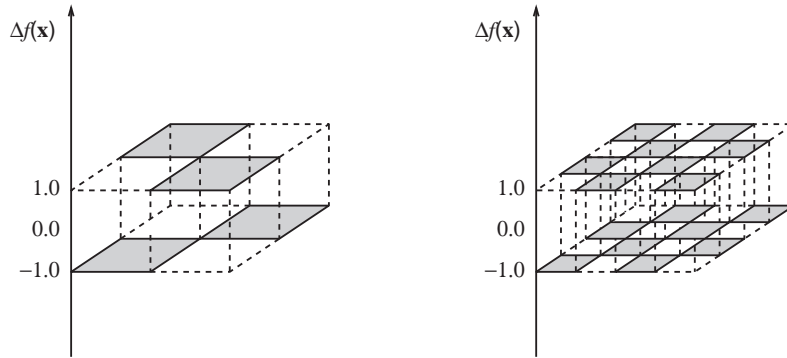


図3 空間的分布の異なる誤差関数。

この問題はより厳密に言えば、誤差関数 $\Delta f(x)$ の値の集合が与えられているとき、 $x$ との対応関係によって推定誤差がどのように変化するのか、ということである。このことを扱うために、ここでは $S$ における $\Delta f(x)$ の分散関数 $\gamma(l)$ を導入する (Isaaks and Srivastava, 1989; Cressie, 1993; Wackernagel, 1995)。分散関数とは $\Delta f(x)$ の値の空間的なばらつきを表すものであり、以下の式によって定義される。

$$\gamma(l) = \frac{1}{2A_S^2 p(l)} \int_{t \in S} \int_{x \in S, |x-t|=l} \{\Delta f(x) - \Delta f(t)\}^2 dx dt \tag{44}$$

但し、 $p(l)$ は $S$ において適当に2点をとったときの2点間距離 $l$ の確率密度関数である。式44を展開すると、

$$\begin{aligned}
\gamma(l) &= \frac{1}{A_S} \int_{x \in S} \{\Delta f(x)\}^2 dx - \frac{1}{A_S^2 p(l)} \int_{t \in S} \int_{x \in S, |x-t|=l} \Delta f(x) \Delta f(t) dx dt \\
&= \frac{1}{A_S} \int_{x \in S} \{\Delta f(x)\}^2 dx - C(l)
\end{aligned} \tag{45}$$

となる。但し、 $C(l)$ は共分散関数を表す。式45を式35に代入すると、

$$\begin{aligned}
 I_\varepsilon &= -\int_{t \in S} \int_{x \in S} |x-t| \Delta f(x) \Delta f(t) dx dt \\
 &= -A_S^2 \int_0^\infty lp(l) C(l) dl \\
 &= -A_S^2 \int_0^\infty lp(l) \left\{ \frac{1}{A_S^2 p(l)} \int_{t \in S} \int_{x \in S, |x-t|=l} \Delta f(x) \Delta f(t) dx dt \right\} dl \\
 &= -A_S^2 \int_0^\infty lp(l) \left\{ \frac{1}{A_S} \int_{x \in S} \{\Delta f(x)\}^2 dx - \gamma(l) \right\} dl \\
 &= -A_S \int_{x \in S} \{\Delta f(x)\}^2 dx \int_0^\infty lp(l) dl + A_S^2 \int_0^\infty lp(l) \gamma(l) dl \\
 &= -A_S D(S) \int_{x \in S} \{\Delta f(x)\}^2 dx + A_S^2 \int_0^\infty lp(l) \gamma(l) dl
 \end{aligned} \tag{46}$$

となる。式46は、推定誤差が誤差関数 $\Delta f(x)$ の絶対的な大きさだけでなく、その空間的分布によっても影響されることを表している。第1項は図3の二つの誤差関数において同じ値を持つが、第2項は $\gamma(l)$ と $p(l)$ の形によって決定され、二つの誤差関数ではその値が異なる可能性がある。そこで次に、具体的な $\gamma(l)$ と $p(l)$ の形を見ながら、誤差関数の空間的な分布と推定誤差 $I_\varepsilon$ の関係を見てみよう。

分散関数 $\gamma(l)$ の典型的な例としては、図4のようなものが挙げられる（あるいはCressie (1993), Wackernagel (1995)を参照）。この図を見ると分かる通り、一般的に $\gamma(l)$ は $l$ の増加関数である。即ち、距離が遠くなるほど、誤差関数 $\Delta f(x)$ の値は大きく異なる。また、 $l$ が小さな値のときに $\gamma(l)$ が大きいということは、 $\Delta f(x)$ の値が局所的に大きく変動しているということを意味し、反対に、 $l$ が小さいときに $\gamma(l)$ も小さければ、 $\Delta f(x)$ の空間的変動は緩やかである、ということになる。

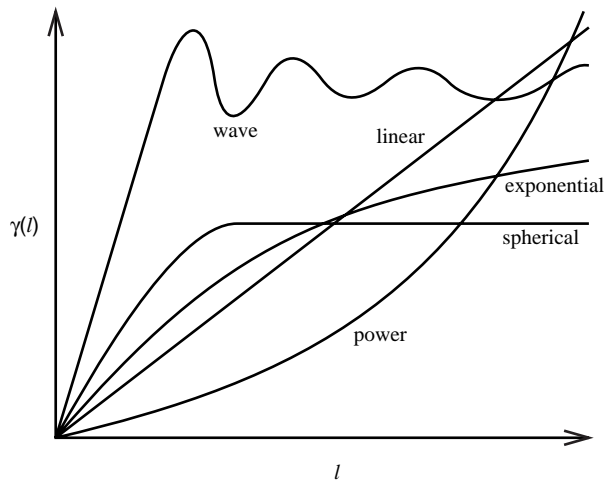


図4 典型的な分散関数 $\gamma(l)$

次に、 $lp(l)$ の具体的な形状を見てみよう。図5を見ると分かる通り、凸多角形の場合には $lp(l)$ はほぼ2次関数に近い形状を持つ。この傾向は一般的に凸多角形に見られる傾向であり（Sadahiro, 1998b）、凸ではない図形の場合には複数の極大点を持つことがある。

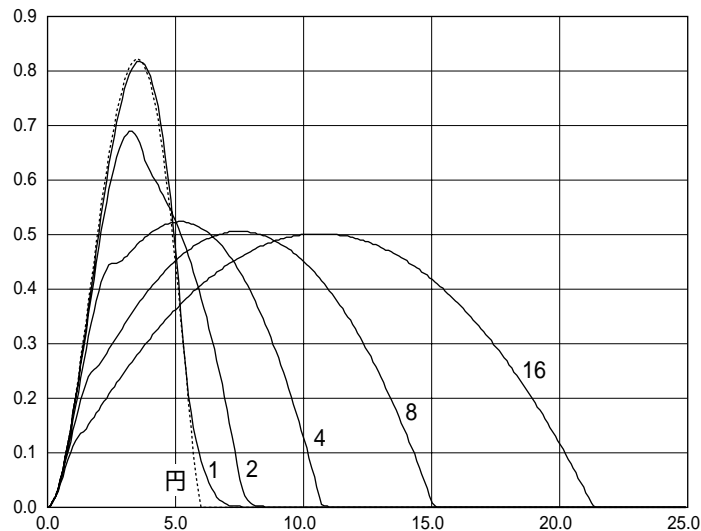


図5 典型的な凸多角形における $lp(l)$ の形状．数字の示されているものは長方形の場合であり，数字は縦横比を表す．

それでは，式46，図4及び図5を用いて誤差関数と推定誤差の関係を考えてみよう．誤差関数 $\Delta f(x)$ の値は所与であるので，ここでは以下の式が成立する．

$$\begin{aligned}
 \int_0^\infty \gamma(l) dl &= \frac{1}{2} \int_{t \in S} \int_{x \in S} \{ \Delta f(x) - \Delta f(t) \}^2 dx dt \\
 &= \int_{x \in S} \{ \Delta f(x) \}^2 dx - \int_{t \in S} \int_{x \in S} \Delta f(x) \Delta f(t) dx dt \\
 &= \text{const.}
 \end{aligned} \tag{47}$$

即ち，分散関数 $\gamma(l)$ の値の総和は一定である．また，式46の第1項も一定なので，式46の第2項が大きいほど，推定誤差が大きいということになる．従って，図5に示されている $lp(l)$ の分布形と $\gamma(l)$ が一致している，つまり， $lp(l)$ が大きいときに $\gamma(l)$ も大きければ，推定誤差 $I_e$ の値も大きくなる事が分かる．

具体的な例を見てみよう．いま， $S$ が一辺1の正方形の場合について，誤差関数 $\Delta f(x)$ が図6のような二値関数の時を想定する．これらの分布では，いずれも式46の第1項が等しい．この場合，分散関数 $\gamma(l)$ は図7， $I_e$ は表1のようになる．図7からは， $n=2$ のときに推定誤差が最も大きくなる事が予想されるが，実際表1ではそれが裏付けられている．図7からはまた，誤差関数が空間的に偏っていない方が，推定誤差が小さくなる事が分かる．

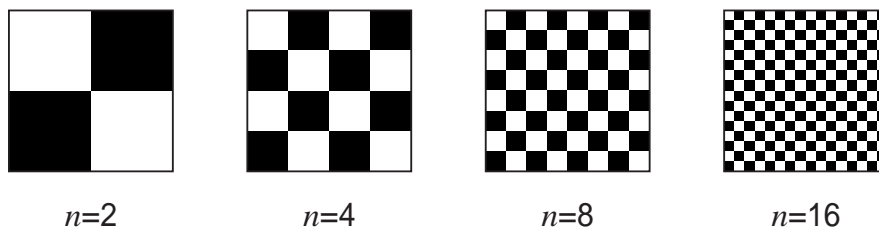


図6 誤差関数 $\Delta f(x)$ ．値は白い部分では-1.0，黒い部分では1.0である．

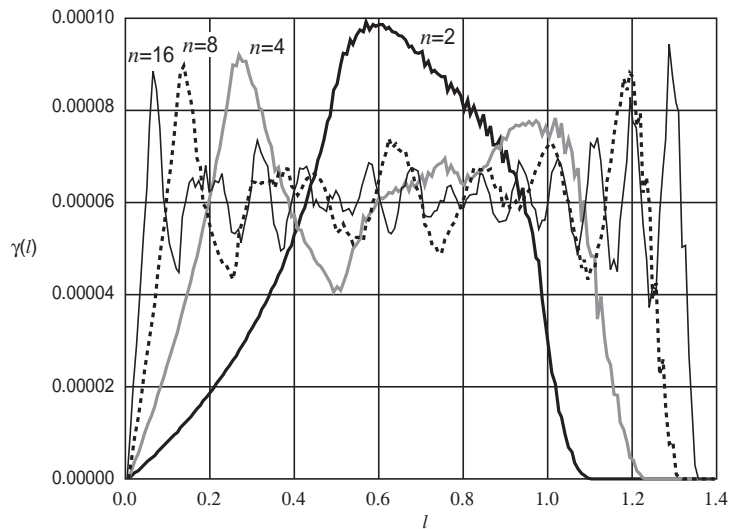


図7 分散関数 $\gamma(l)$

表1  $I_\epsilon$ の値

$n$	$I_\epsilon$
2	0.0000370
4	0.0000326
8	0.0000319
16	0.0000318

以上の考察から、誤差関数は 1) 絶対値が小さく、2) 誤差の値のばらつきが小さく、3) 空間的に偏りが少ない、ことが望ましいと言える。これらの条件が満たされていれば、推定誤差 $I_\epsilon$ の値を小さく押さえることができるわけである。

## 5. 数値計算例

本節では、具体的ないくつかの連続分布を取り上げ、それぞれについて各補間法の推定精度の比較を行う。集計元地区 $S$ としては、半径1.0の円領域を取り上げるが、これは様々な凸多角形の近似という意味を持っている。実際の空間集計地区としては行政区が多く用いられるが、行政区の形状は凸多角形であることが多い。また、代表点は円の中心にあるものとする。

連続分布の具体的な形状については以下順次説明するが、その体積は常に一定値とし、 $1/2\pi$ と $2\pi$ の2通りを試みる。即ち、

$$V = \frac{1}{2}\pi \text{ or } 2\pi \quad (48)$$

である。

### 5.1 円柱分布

まず初めに、連続分布が $S$ の代表点を中心とする円柱形である場合を取り上げる。円柱の半径 $r$ は $V$ を固定したまま $0 \sim 1$ まで連続的に変化させ、その時の推定誤差 $I_\epsilon$ の変化を見る(図8)。なお、円柱の半径を $r$ 、高さを $h$ と表記する。

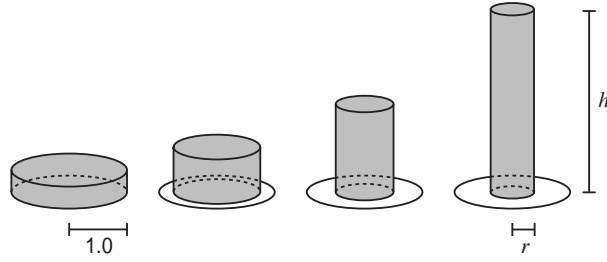


図8 円柱分布における連続分布の変化

円柱分布の場合，各補間法における推定誤差 $I_\varepsilon$ は以下のように与えられる．

1) 面積按分法

式12より，

$$\begin{aligned}
 I_\varepsilon &= -\int_{t \in S} \int_{x \in S} |\mathbf{x} - \mathbf{t}| f(\mathbf{x}) f(\mathbf{t}) d\mathbf{x} d\mathbf{t} + \frac{2V}{A_S} \int_{t \in S} f(\mathbf{t}) \int_{x \in S} |\mathbf{x} - \mathbf{t}| d\mathbf{x} d\mathbf{t} - V^2 D(S) \\
 &= -\left(\frac{V}{\pi r^2}\right)^2 \int_{t \in C(z,r)} \int_{x \in C(z,r)} |\mathbf{x} - \mathbf{t}| d\mathbf{x} d\mathbf{t} + \frac{2V}{\pi} \frac{V}{\pi r^2} \int_{t \in C(z,r)} \int_{x \in S} |\mathbf{x} - \mathbf{t}| d\mathbf{x} d\mathbf{t} - V^2 \frac{128}{45\pi} R \\
 &= -\frac{128}{45\pi} r V^2 + 2V^2 d(R,r) - \frac{128}{45\pi} R V^2
 \end{aligned} \tag{49}$$

となる（但し， $R$ は集計元地区 $S$ の半径を表す）．ここで， $d(R,r)$ は中心を共有する半径 $R$ と $r$  ( $R > r$ とする) という2つの円領域について，各領域内に各々適当な1点をとったときの点間距離の期待値であり，以下の式で表される（栗田・腰塚，1988）．

$$d(R,r) = R \left( \frac{2}{3} + \frac{r^2}{4R^2} - \frac{r^4}{96R^4} + \dots \right) \tag{50}$$

式50の近似を第3項で打ち切り，

$$d(R,r) \approx R \left( \frac{2}{3} + \frac{r^2}{4R^2} - \frac{r^4}{96R^4} \right) \tag{51}$$

として式49に代入すると，

$$\begin{aligned}
 I_\varepsilon &\approx -\frac{128}{45\pi} r V^2 + 2V^2 R \left( \frac{2}{3} + \frac{r^2}{4R^2} - \frac{r^4}{96R^4} \right) - \frac{128}{45\pi} R V^2 \\
 &= \left\{ -\frac{128}{45\pi} (r + R) + 2R \left( \frac{2}{3} + \frac{r^2}{4R^2} - \frac{r^4}{96R^4} \right) \right\} V^2 \\
 &= \left\{ -\frac{r^4}{48R^3} + \frac{r^2}{2R} - \frac{128}{45\pi} r + \frac{4}{3} R - \frac{128}{45\pi} R \right\} V^2 \\
 &= \frac{V^2}{720\pi} \left\{ -\frac{15\pi r^4}{R^3} + \frac{360\pi r^2}{R} - 2048r + (960\pi - 2048)R \right\} \\
 &= \frac{V^2}{720\pi} \left\{ -15\pi r^4 + 360\pi r^2 - 2048r + 960\pi - 2048 \right\}
 \end{aligned} \tag{52}$$

となる．但し， $r$ の4次の項は非常に小さく，推定誤差 $I_\varepsilon$ は $r$ に対してほぼ2次関数的に変化する．

2) 代表点内包法

式17より，

$$\begin{aligned}
I_\varepsilon &= -\int_{\mathbf{t} \in S} \int_{\mathbf{x} \in S} |\mathbf{x} - \mathbf{t}| f(\mathbf{x}) f(\mathbf{t}) d\mathbf{x} d\mathbf{t} + 2V \int_{\mathbf{x} \in S} |\mathbf{x} - \mathbf{z}| f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \\
&= -\left(\frac{V}{\pi r^2}\right)^2 \int_{\mathbf{t} \in C(\mathbf{z}, r)} \int_{\mathbf{x} \in C(\mathbf{z}, r)} |\mathbf{x} - \mathbf{t}| d\mathbf{x} d\mathbf{t} + 2V \left(\frac{V}{\pi r^2}\right) \int_{\mathbf{x} \in C(\mathbf{z}, r)} |\mathbf{x} - \mathbf{z}| d\mathbf{x} \\
&= -V^2 \frac{128}{45\pi} D(C(\mathbf{z}, r)) + 2V^2 d(r, 0) \\
&= -\frac{128}{45\pi} rV^2 + \frac{4}{3} rV^2 \\
&= \left(\frac{4}{3} - \frac{128}{45\pi}\right) rV^2
\end{aligned} \tag{53}$$

となる。即ち、代表点内包法では推定誤差 $I_\varepsilon$ は $r$ に対して線形に変化する。

### 3) 円錐法

円錐法の推定誤差は、円柱分布の場合、前述の式よりもより明確に表される。まず、式26及び27の条件式は、

$$\begin{aligned}
\lambda \left( L_{\max} A_S - \int_{\mathbf{x} \in S} |\mathbf{x} - \mathbf{z}| d\mathbf{x} \right) &= \lambda \{ \pi R^3 - \pi R^2 d(R, 0) \} \\
&= \frac{1}{3} \pi \lambda R^3 \\
&= \frac{1}{3} \pi \lambda
\end{aligned} \tag{54}$$

となる。また、 $V=1/2\pi$ を合わせて考えると、式26は

$$\begin{aligned}
&\text{if} \quad \lambda < \frac{3}{2} \\
&\text{then} \quad \hat{f}(\mathbf{x}) = \left( \frac{1}{2} + \frac{2}{3} \lambda \right) - \lambda |\mathbf{x} - \mathbf{z}|
\end{aligned} \tag{55}$$

となる。また式27については式28を先に考えると、

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbf{x} \in S \cap C\left(\mathbf{z}, \frac{H}{\lambda}\right)} (H - \lambda |\mathbf{x} - \mathbf{z}|) d\mathbf{x} &= V \\
&= \int_{\mathbf{x} \in C\left(\mathbf{z}, \frac{H}{\lambda}\right)} (H - \lambda |\mathbf{x} - \mathbf{z}|) d\mathbf{x} \\
&= H \int_{\mathbf{x} \in C\left(\mathbf{z}, \frac{H}{\lambda}\right)} d\mathbf{x} - \lambda \int_{\mathbf{x} \in C\left(\mathbf{z}, \frac{H}{\lambda}\right)} |\mathbf{x} - \mathbf{z}| d\mathbf{x} \\
&= \pi \left(\frac{H}{\lambda}\right)^2 H - \pi \lambda \left(\frac{H}{\lambda}\right)^2 d\left(\frac{H}{\lambda}, 0\right) \\
&= \frac{\pi H^3}{\lambda^2} - \frac{2}{3} \frac{\pi H^3}{\lambda^2} \\
&= \frac{\pi H^3}{3\lambda^2}
\end{aligned} \tag{56}$$

を解いて

$$H = \sqrt[3]{\frac{3\lambda^2}{2}} \tag{57}$$

を得る。従って式27は

$$\begin{aligned}
 & \text{if} && \lambda \geq \frac{3}{2} \\
 & \text{then} && \hat{f}(\mathbf{x}) = \begin{cases} \sqrt[3]{\frac{3\lambda^2}{2}} - \lambda|\mathbf{x} - \mathbf{z}| & \text{if } |\mathbf{x} - \mathbf{z}| \leq \sqrt[3]{\frac{3}{2\lambda}} \\ 0 & \text{if } |\mathbf{x} - \mathbf{z}| > \sqrt[3]{\frac{3}{2\lambda}} \end{cases} \quad (58)
 \end{aligned}$$

となる。なお、実際の数値分析では、稜線の傾き $\lambda$ として1~5までの整数値を試みる。

#### 4) 補助データ法

補助データ法としては、ここでは最も代表的な補助関数 $\varphi(\mathbf{x})$ である、階段関数を用いる方法を試みる。階段関数としては、2段階のもの(二値関数)を一つ、4段階のもの二つ試みる。それぞれ具体的な $\varphi(\mathbf{x})$ の形は、

$$\text{補助法1:} \quad \varphi_1(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & \text{if } f(\mathbf{x}) \geq 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (59)$$

$$\text{補助法2:} \quad \varphi_2(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & \text{if } f(\mathbf{x}) \geq 1 \\ 2/3 & \text{if } 1 > f(\mathbf{x}) \geq 2/3 \\ 1/3 & \text{if } 2/3 > f(\mathbf{x}) \geq 1/3 \\ 0 & \text{if } 1/3 > f(\mathbf{x}) \end{cases} \quad (60)$$

$$\text{補助法3:} \quad \varphi_3(\mathbf{x}) = \begin{cases} 3 & \text{if } f(\mathbf{x}) \geq 3 \\ 2 & \text{if } 3 > f(\mathbf{x}) \geq 2 \\ 1 & \text{if } 2 > f(\mathbf{x}) \geq 1 \\ 0 & \text{if } 1 > f(\mathbf{x}) \end{cases} \quad (61)$$

である(図9参照)。これらを式29に代入したものを推定関数とし、推定誤差 $I_e$ を算出する。但し、階段関数のような関数形の場合、集計元地区 $S$ においてその値が常に0となる場合がある。即ち、

$$\varphi(\mathbf{x}) = 0 \quad (62)$$

である。このようなときには、式29の分母が0となってしまうため、ここでは

$$\varphi(\mathbf{x}) = \text{const.} \quad (63)$$

として面積按分法と同等の取り扱いを行うものとする。

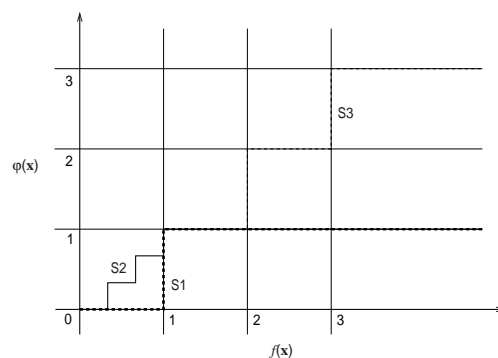


図9 補助関数 $\varphi(\mathbf{x})$ の形状

以上の設定のもとで、推定誤差 $I_e$ を計算した結果を図10に示す。



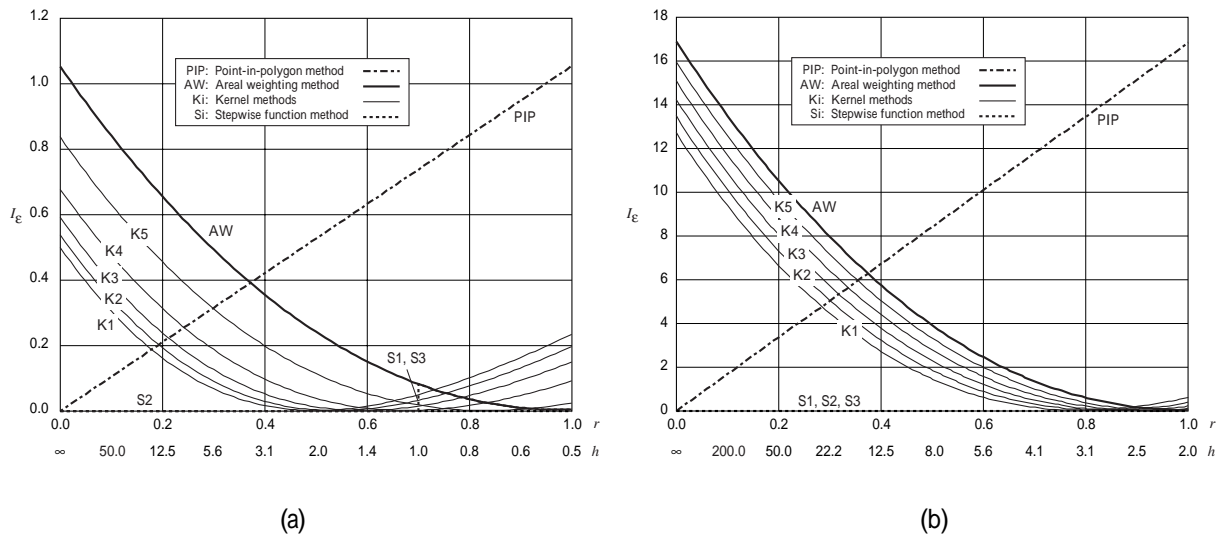


図10 円柱の半径 $r$ と各補間法の推定誤差 $I_e$ の関係． $K_i$ は傾き $i$ の円錐法， $S_i$ は補助データ法 $i$ をそれぞれ表す．a)  $V=1/2\pi$ ，b)  $V=2\pi$ ．

これらの図を見ると、まず、いずれの場合にも補助データ法の推定誤差が非常に小さいことがわかる．特に $V=2\pi$ の場合には常に誤差が0となっている．補助関数が階段関数の場合、連続分布が二値関数のときにはこのようなことが起こりうる．また、面積按分法と円錐法は類似した傾向を見せており、いずれも円柱の半径が大きいの、つまり、分布が $S$ 全体に散らばっているほど良い推定結果を示す．但し、円錐の傾きが大きくな場合には、多少分布が集中している方が推定誤差が小さくなる．

### 5.2 円錐分布

次に、連続分布が $S$ の代表点を中心とする円錐形である場合を取り上げる．円錐の傾きを0～100まで連続的に変化させ、その時の推定誤差 $I_e$ の変化を見る．但し、傾きが小さく体積 $V$ を保つことができない場合には、円錐部分の下に円柱を付加する（図11）．なお、円錐の傾きを $m$ 、高さを $h$ と表記する．

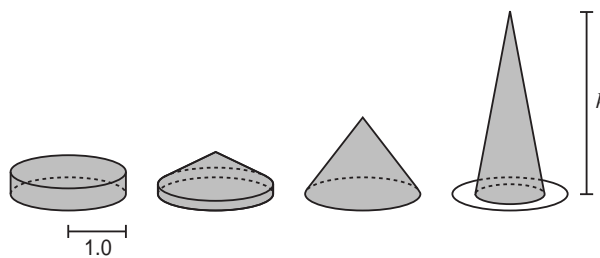


図11 円錐分布における連続分布の変化

円錐分布の場合、各補間法における推定誤差 $I_e$ は3節において示されている推定関数を用いた数値積分によって求める．以下、計算結果を図12、13に示す．

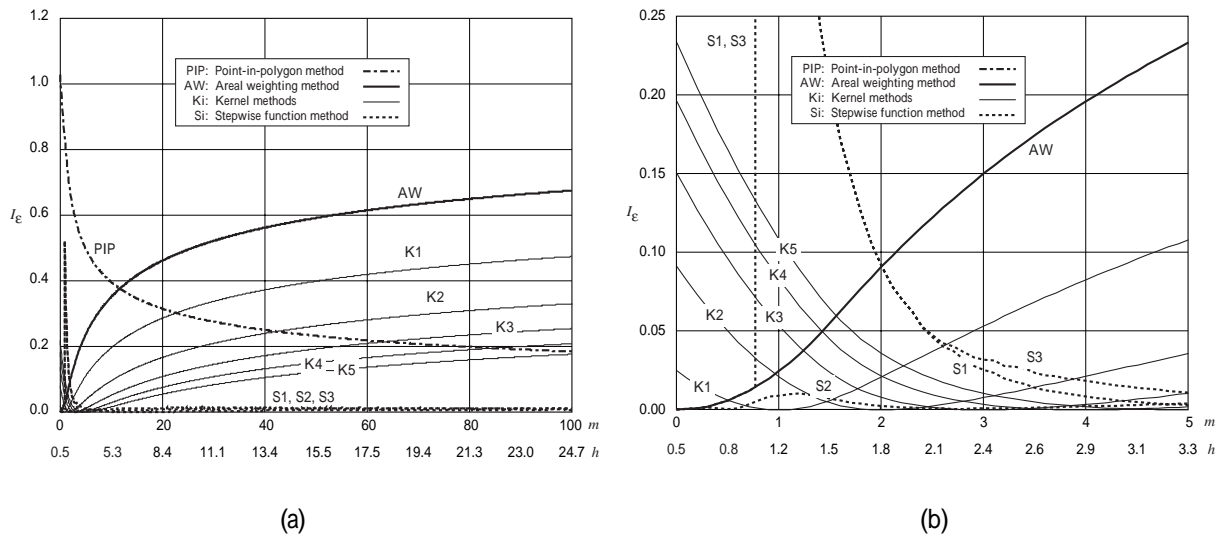


図12  $V=1/2\pi$ の場合における円錐の傾き $m$ と各補間法の推定誤差 $I_e$ の関係． $K_i$ は傾き $i$ の円錐法， $S_i$ は補助データ法 $i$ をそれぞれ表す．a) 全体図，b) 拡大図．

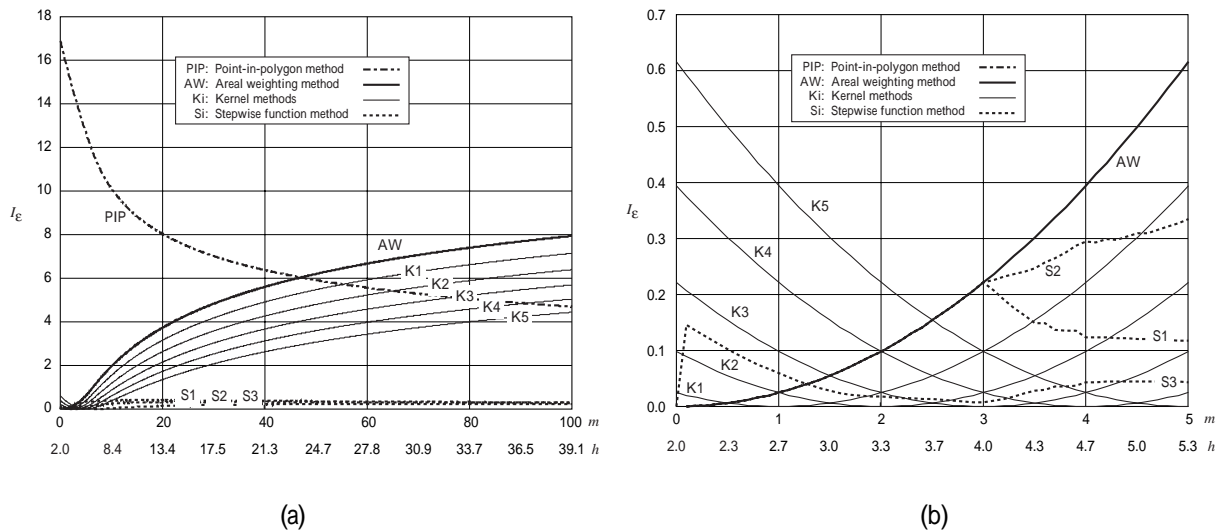


図13  $V=2\pi$ の場合における円錐の傾き $m$ と各補間法の推定誤差 $I_e$ の関係． $K_i$ は傾き $i$ の円錐法， $S_i$ は補助データ法 $i$ をそれぞれ表す．a) 全体図，b) 拡大図．

これらの図からまず気がつくのは、代表点法が他の方法と比べて全体的に劣っていることである。代表点法が分布が代表点の周りに集中していることを前提としているが、相当程度の集中でなければ円錐分布や面積按分法の方が実用的であると言える。

またこれらの図において特徴的なのは、必ずしも補助データ法が常に良い結果をもたらすわけではない、ということである。図12b及び13bを見ると明らかとなり、 $m$ のいくつかの値域では面積按分法や円錐法が補助データ法よりも良い結果をもたらしている。これは主に、階段関数の境界の設定に起因している。即ち、連続分布のとりうる値の範囲に対して、全体に渡るように境界が設定されている（ $V=2\pi$ の場合における $S_3$ ）と非常に良い結果をもたらすが、連続分布の値域の一部に偏っている（ $V=2\pi$ の場合における $S_1, S_2$ ）と推定結果は他の面積補間法よりも悪くなる。また、補助データ法の場合、値域を細かく設定した方が良い結果をもたらすと考えられるが、図12bを見ると必ずしもそうではないことがわかる。これはやや直観に反するが、やはり、全体的な値域の設定が適切ではないことによる。

### 5.3 円環分布

次に、連続分布が $S$ の代表点を中心とする円環形である場合を取り上げる。前2例、即ち円柱分布と円錐分布では、いずれも分布が集計元地区 $S$ の中心部に集中していた。このような分布は人口分布などにおいてよく見られるものであるが、場合によってはその逆、即ち、分布が集計元地区 $S$ の周辺部に集中していることもあり得る。そこでここでは、円環分布を用いてそのような分布における推定誤差を分析する。

具体的には、円環の内径を $0 \sim 1$ まで連続的に変化させ、その時の推定誤差 $I_\varepsilon$ の変化を見る(図14)。なお、円環の内径を $r$ 、高さを $h$ と表記する。

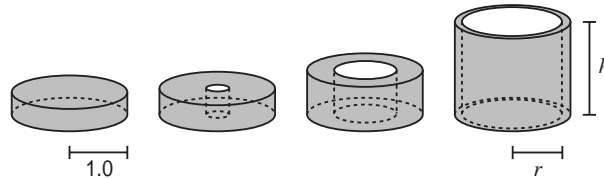


図14 円環分布における連続分布の変化

円環分布の場合も円錐分布の場合と同様、各補間法における推定誤差 $I_\varepsilon$ は3節において示されている推定関数を用いた数値積分によって求める。以下、計算結果を図15に示す。

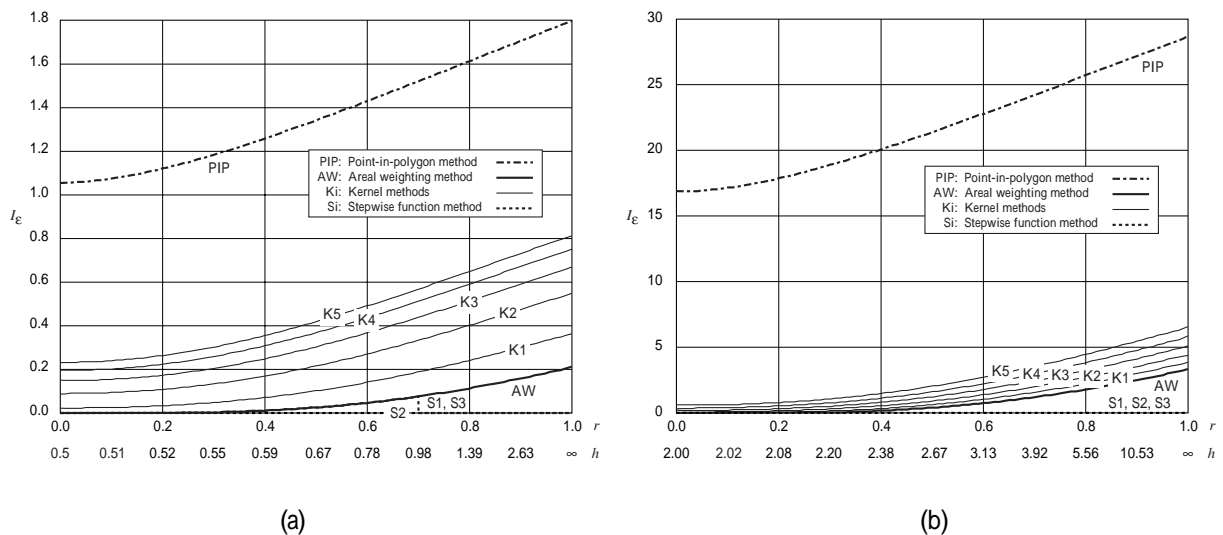


図15 円環の内径 $r$ と各補間法の推定誤差 $I_\varepsilon$ の関係。 $K_i$ は傾き $i$ の円錐法、 $S_i$ は補助データ法 $i$ をそれぞれ表す。a)  $V=1/2\pi$ , b)  $V=2\pi$ 。

図15を見ると、どの補間法においても円の半径が大きくなるほど推定誤差が大きくなっていることが分かる。補助データ法の推定誤差は $V=2\pi$ の場合に常に0となっているが、他の補間法は分布が周辺に偏るほど推定誤差が大きくなる。これは、補間法の想定している連続分布がいずれもどちらかと言えば地区の中心に集中したものであり、このような周辺に偏った分布はそれと相反するということによる。円環分布のような場合には、補助データが利用可能であれば補助データ法が良いが、そうでなければ補間法の選択は極めて難しいと言える。

### 5.4 線形分布

最後に、連続分布が線形、即ち平面である場合を取り上げよう。集計元地区 $S$ が比較的大きい場合、連続分布がこのような広域的な傾向を持つことは少なくない。もちろん、連続分布の形状は必ずしも線形とは限らないが、指数関数形や対数関数形などについても線形分布の分析結果から誤差傾向の概略を類推す

ることが可能であろう。

具体的な分布形については，集計元地区 $S$ 内のあらゆる地点について値が0とまらない範囲で傾きを0から連続的に変化させ，その時の推定誤差 $I_e$ の変化を見る（図16）．分布の傾きを $m$ ，最高地点での高さを $h$ と表記する．

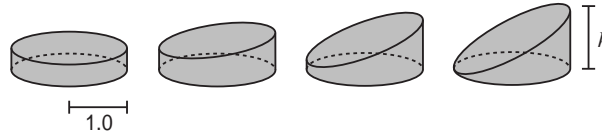


図16 線形分布における連続分布の変化

線形分布の場合も円錐，円環分布の場合と同様，各補間法における推定誤差 $I_e$ は3節の推定関数を用いた数値積分によって求める．以下，計算結果を図17に示す．

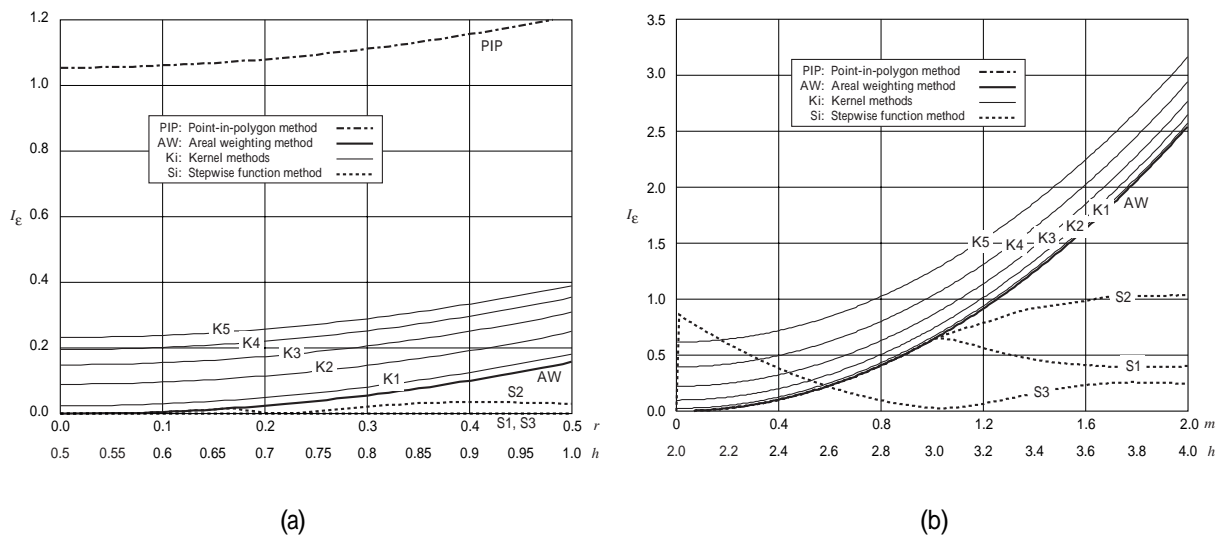


図17 線形分布の傾き $m$ と各補間法の推定誤差 $I_e$ の関係． $K_i$ は傾き $i$ の円錐法， $S_i$ は補助データ法 $i$ をそれぞれ表す．a)  $V=1/2\pi$ ，b)  $V=2\pi$ ．

図17では，面積按分法，代表点法，円錐法はいずれも分布の傾きが大きくなるにつれて推定誤差を増しており，このような線形分布にはあまり向いていないことがわかる．これらの中では，どちらかと言えば面積按分法が良い結果をもたらしている．補助データ法は全体に非常によい結果を見せている． $V=2\pi$ の場合に若干例外があるものの，ほぼ常に面積按分法よりも推定誤差が少ない．境界値の設定があまり適切ではない $S_2$ の結果（ $V=2\pi$ の場合）は他の補助データ法よりも良くないが，それでも他の補間法と比べれば推定誤差はかなり小さい．

## 6. おわりに

以上のように本論文では，ある空間単位に集計されている連続分布の推定誤差を，面補間法によって別の空間単位に変換する際の変換誤差を分析した．これまで主に点分布に関して行われてきたこの種の分析を新たに連続分布に適用したことは十分意義があるものと考えられる．

分析から得られた結論は，いずれも従来の研究成果とそれほど矛盾していない．補助データ法があまり良い結果をもたらさない場合がある，ということは新たな発見であるが，他の結論は従来経験的に，あるいは実証的に示されてきた事柄を裏付けるものと言えよう．

今後の研究課題としては，より多様な空間単位や分布形の場合の分析，実際のデータを用いた分析など

が挙げられる。本論文で提案した分析方法はモンテカルロシミュレーションなどと比べてはるかに簡便であり、より多くの場合を分析するのに適している。また、複数の空間単位の間での面補間における推定誤差も、今後の研究対象の一つである。GISや空間解析では、集計元地区や集計先地区は一つではなく複数であることが少なくない。そのような場合における面補間法の選択は、重要な研究課題であろう。

#### 参考文献

- Bracken, I. and Martin, D. (1989): The Generation of Spatial Population Distributions from Census Centroid Data. *Environment and Planning A*, **21**, 537-543.
- Bracken, I. (1993): An Extensive Surface Model Database for Population-Related Information: Concept and Application. *Environment and Planning B*, **20**, 13-27.
- Bracken, I. and Martin, D. (1995): Linkage of the 1981 and 1991 UK Censuses Using Surface Modelling Concepts. *Environment and Planning A*, **27**, 379-390.
- Burrough, P. A. and McDonnell, R. A. (1998): *Principles of Geographical Information Systems*. New York: Oxford University Press.
- Cockings, S., Fisher, P. F. and Langford, M. (1997): Parametrization and Visualization of the Errors in Areal Interpolation. *Environment and Planning A*, **27**, 211-224.
- Cressie, N. (1993): *Statistics for Spatial Data*. New York: John Wiley.
- Fisher, P. F. and Langford, M. (1995): Modelling the Errors in Areal Interpolation between Zonal Systems by Monte Carlo Simulation. *Geographical Analysis*, **29**, 314-328.
- Fisher, P. F. and Langford, M. (1996): Modeling Sensitivity to Accuracy in Classified Imagery: A Study of Areal Interpolation by Dasymetric Mapping. *Professional Geographer*, **48**, 299-309.
- Flowerdew, R. (1988): Statistical Methods for Areal Interpolation: Predicting Count Data from a Binary Variable. *Research Report 15*, Northern Regional Research Laboratory.
- Flowerdew, R. and Green, M. (1991): Data Integration: Statistical Methods for Transferring Data between Zonal Systems. In *Handling Geographical Information: Methodology and Potential Applications*, edited by I. Masser and M. Blakemore (New York: Longman), 38-54.
- Goodchild, M. F. and Lam, N. N-S. (1989): Areal Interpolation: a Variant of the Traditional Spatial Problem. *Geo-processing*, **1**, 297-312.
- Goodchild, M. F., Anselin, L., and Deichmann, U. (1993): A Framework for the Areal Interpolation of Socioeconomic Data. *Environment and Planning A*, **25**, 383-397.
- Ghosh, B. (1951): Random Distances within a Rectangle and between Two Rectangles. *Bulletin of the Calcutta Mathematics Society*, **43**, 17-24.
- Isaaks, E. H. and Srivastava, R. (1989): *An Introduction to Applied Geostatistics*. New York: Oxford University Press.
- Kennedy, S. and Tobler, W. R. (1983): Geographic Interpolation. *Geographical Analysis*, **15**, 151-156.
- Lam, N. N-S. (1983): Spatial Interpolation Methods: a Review. *American Cartographer*, **10**, 129-149.
- Langford, M., Maguire, D. J. and Unwin, D. J. (1991): The Areal Interpolation Problem: Estimating Population Using Remote Sensing in a GIS Framework. In *Handling Geographical Information: Methodology and Potential Applications*, edited by I. Masser and M. Blakemore (New York: Longman), 55-77.
- Okabe, A. and Sadahiro, Y. (1997): Variation in Count Data Transferred from a Set of Irregular Zones to a Set of Regular Zones through the Point-in-polygon Method. *International Journal of Geographical Information Science*, **11**, 93-106.
- Ripley, B. D. (1981) *Spatial Statistics*. New York: John Wiley.
- Sadahiro, Y. (1998a): Accuracy of Count Data Transferred through the Areal Weighting Interpolation Method. *Discussion Paper Series*, **76E**, Department of Urban Engineering, University of Tokyo.
- Sadahiro, Y. (1998b): Accuracy of Count Data Estimated by the Point-in-polygon Method. *Discussion Paper Series*, **77E**, Department of Urban Engineering, University of Tokyo.

- Sadahiro, Y. (1999): Statistical Methods for Analyzing the Distribution of Spatial Objects in Relation to a Surface. *Geographical Systems*, to appear.
- Santaló, L. A. (1976) *Integral Geometry and Geometric Probability*. London: Addison-Wesley.
- Stoyan, D. and Stoyan, H. (1994): *Fractals, Random Shapes and Point Fields*. New York: John Wiley.
- Tobler, W. R. (1979): Smooth Pycnophylactic Interpolation for Geographical Regions. *Journal of the American Statistical Association*, **74**, 519-530.
- Wackernagel, H. (1995): *Multivariate Geostatistics*. Berlin: Springer-Verlag.
- 栗田治・腰塚武志 (1988): 領域間平均距離の近似理論とその応用. 日本都市計画学会学術研究論文集, **23**, 43-48.
- 腰塚武志 (1978): 地域内距離. *Journal of the Operations Research Society of Japan*, **21**, 302-318.

APPENDIX 円柱分布において円柱の半径が0の極限の場合の推定誤差

円柱の半径を $r$ とおくと, 式10より,

$$\begin{aligned}
I_{\varepsilon} &= -\lim_{r \rightarrow 0} \int_{t \in S} \int_{x \in S} |\mathbf{x} - \mathbf{t}| \{f(\mathbf{x}) - \hat{f}(\mathbf{x})\} \{f(\mathbf{t}) - \hat{f}(\mathbf{t})\} dx dt \\
&= -\lim_{r \rightarrow 0} \left( \frac{V}{\pi r^2} \right)^2 \int_{t \in C(z,r)} \int_{x \in C(z,r)} |\mathbf{x} - \mathbf{t}| dx dt \\
&\quad + \lim_{r \rightarrow 0} \frac{2V}{\pi r^2} \int_{t \in S} \int_{x \in C(z,r)} |\mathbf{x} - \mathbf{t}| \hat{f}(\mathbf{t}) dx dt \\
&\quad - \int_{t \in S} \int_{x \in S} |\mathbf{x} - \mathbf{t}| \hat{f}(\mathbf{x}) \hat{f}(\mathbf{t}) dx dt \\
&= -\lim_{r \rightarrow 0} V^2 \frac{128}{45\pi} r \\
&\quad + 2V \int_{x \in S} |\mathbf{z} - \mathbf{x}| \hat{f}(\mathbf{x}) dx \\
&\quad - \int_{t \in S} \int_{x \in S} |\mathbf{x} - \mathbf{t}| \hat{f}(\mathbf{x}) \hat{f}(\mathbf{t}) dx dt \\
&= 2V \int_{x \in S} |\mathbf{z} - \mathbf{x}| \hat{f}(\mathbf{x}) dx - \int_{t \in S} \int_{x \in S} |\mathbf{x} - \mathbf{t}| \hat{f}(\mathbf{x}) \hat{f}(\mathbf{t}) dx dt
\end{aligned} \tag{A1}$$

を得る. ここで, 集計元地区 $S$ が半径 $R$ の円の場合を考えると, 面積按分法では

$$\begin{aligned}
I_{\varepsilon} &= 2V \int_{x \in S} |\mathbf{z} - \mathbf{x}| \hat{f}(\mathbf{x}) dx - \left( \frac{V}{\pi R^2} \right)^2 \int_{t \in S} \int_{x \in S} |\mathbf{x} - \mathbf{t}| dx dt \\
&= \frac{4}{3} RV^2 - \frac{128}{45\pi} RV^2 \\
&= \left( \frac{4}{3} - \frac{128}{45\pi} \right) RV^2
\end{aligned} \tag{A2}$$

であり, 代表点法の場合には

$$\begin{aligned}
I_{\varepsilon} &= 2 \lim_{r \rightarrow 0} V \left( \frac{V}{\pi r^2} \right) \int_{x \in C(z,r)} |\mathbf{z} - \mathbf{x}| dx - \lim_{r \rightarrow 0} \left( \frac{V}{\pi r^2} \right)^2 \int_{t \in C(z,r)} \int_{x \in C(z,r)} |\mathbf{x} - \mathbf{t}| dx dt \\
&= 2 \lim_{r \rightarrow 0} \frac{2}{3} r V^2 - \lim_{r \rightarrow 0} \frac{128}{45\pi} r V^2 \\
&= \lim_{r \rightarrow 0} \left( \frac{4}{3} - \frac{128}{45\pi} \right) r V^2 \\
&= 0
\end{aligned} \tag{A3}$$

となる.