

Discussion Paper No. 94

**Accuracy of buffer operation on spatial data with locational information error**

Yukio Sadahiro\*

\*Department of Urban Engineering, University of Tokyo

7-3-1, Hongo, Bunkyo-ku, Tokyo 113-8656, Japan

Phone: +81-3-5841-6273

Fax: +81-3-5841-8521

E-mail: sada@okabe.t.u-tokyo.ac.jp

本稿では、GIS における最も基本的な空間操作の一つであるバッファリング操作を取り上げ、空間オブジェクトの位置情報に誤差が含まれている場合に、バッファリング操作の結果得られる領域がどの程度信頼できるのか、その精度を評価する。この種の研究は、従来実証的に行われることが多かったが(例えば Bolstad *et al.*, 1990; Veregin, 1994, 1996 など)、ここでは理論的な手法により、平均的な精度の導出を行う。

## 1. 点に対するバッファリング操作の精度

### 1.1 理論的枠組み

いま、ある領域  $R$  内に存在する点  $P$  に対するバッファリング操作を考える。点オブジェクトのバッファ領域は円領域であり、点  $P$  に関する半径  $b$  のバッファ領域を  $B(P, b)$  と表す。

もし、点  $P$  の位置が正しく空間データ化されていれば、そのデータに基づいたバッファリング操作の結果は  $B(P, b)$  と一致するはずである。しかしながら、空間データ化の際にはデジタイズエラーや測定誤差などの様々な要因によって位置誤差が発生する。そこでいま、点  $P$  の正位置の位置ベクトルを  $\mathbf{0}$  として、点  $P$  の位置データは確率密度関数  $f(\mathbf{x})$  に従って確率的に決定されるものとし、その結果得られる点を  $P'$ 、そのバッファ領域を  $B(P', b)$  とそれぞれ表す。

バッファリング操作の精度は、真の領域  $B(P, b)$  とデータ上の領域  $B(P', b)$  との差異によって評価することができる。バッファリング操作を、空間上の各地点をバッファ領域内と領域外という 2 つのカテゴリのどちらかに割り当てるといふ操作であると見なすと、二つの領域の差異は、二値割り当て操作の齟齬と考えることが可能である。この場合、衛星画像の判読などでよく用いられる欠落エラー (Error of omission) 及び生成エラー (Error of commission) という概念が有用である。それぞれ、ある一つのカテゴリ  $A$  について、本来  $A$  であるのに他のカテゴリに割り当てられてしまう誤り、及び、本来  $A$  ではないのに  $A$  に割り当てられてしまう誤りを表しており、 $A$  の面積に対する各誤り領域の比率によって、割り当て操作の精度を評価する。この方法は、Shi *et al.* (2003) の誤差伝播分析でも用いられており、本論文でも同様の方法をバッファリング精度の評価に用いる。

以下、欠落エラー及び生成エラーの発生している領域をそれぞれ欠落領域、生成領域と呼ぶ(図 1)。さらに、真のバッファ領域  $B(P, b)$  に対する各領域の面積の割合を欠落率、生成率とし、それらの期待値によってバッファリング精度を評価する。

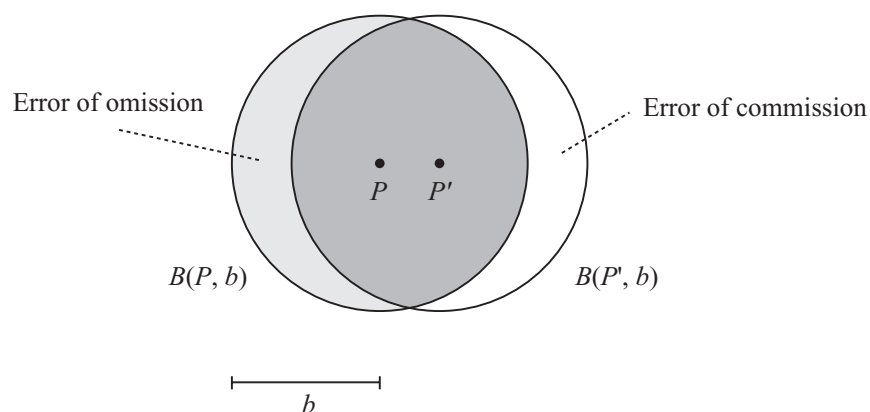


図 1 欠落領域と生成領域

位置ベクトル  $\mathbf{z}$  を持つ点  $Q$  が  $B(P', b)$  に含まれる確率は、

$$\Pr[Q \in B(P', b)] = \int_{\mathbf{x} \in C(\mathbf{z}, b)} f(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$$

(1)

と表される．但しここで， $C(\mathbf{x}, b)$ は中心が $\mathbf{x}$ にある半径 $b$ の円領域である．従って欠落率の期待値 $\gamma_0$ は，この値を全領域 $R$ で積分すれば計算することができる．即ち， $A()$ を面積を与える演算子として

$$\begin{aligned} \gamma_0 &= E[A(B(P, b) \setminus B(P', b))] \\ &= \frac{\int_{\mathbf{z} \in C(0, b)} (1 - \Pr[Q \in B(P', b)]) d\mathbf{z}}{A(B(P, b))} \\ &= \frac{\pi b^2 - \int_{\mathbf{z} \in C(0, b)} \int_{\mathbf{x} \in C(\mathbf{z}, b)} f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} d\mathbf{z}}{\pi b^2} \\ &= 1 - \frac{\int_{\mathbf{z} \in C(0, b)} \int_{\mathbf{x} \in C(\mathbf{z}, b)} f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} d\mathbf{z}}{\pi b^2} \end{aligned}$$

(2)

となる．同様に生成率の期待値 $\gamma_C$ は，

$$\begin{aligned} \gamma_C &= E[A(B'(P, b) \setminus B(P, b))] \\ &= \frac{\int_{\mathbf{z} \in R \setminus C(0, b)} \Pr[Q \in B(P', b)] d\mathbf{x}}{A(B(P, b))} \\ &= \frac{\int_{\mathbf{z} \in R} \int_{\mathbf{x} \in C(\mathbf{z}, b)} f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} d\mathbf{z}}{\pi b^2} - \frac{\int_{\mathbf{z} \in C(0, b)} \int_{\mathbf{x} \in C(\mathbf{z}, b)} f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} d\mathbf{z}}{\pi b^2} \end{aligned}$$

(3)

である．ここで，点の確率密度関数 $f(\mathbf{x})$ の定義域全域に対する半径 $b$ のバッファ領域が，領域 $R$ に完全に内包されると仮定すると，式(3)は

$$\begin{aligned}
\gamma_C &= \frac{\int_{\mathbf{z} \in R} \int_{\mathbf{x} \in C(\mathbf{z}, b)} f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} d\mathbf{z}}{\pi b^2} - \frac{\int_{\mathbf{z} \in C(0, b)} \int_{\mathbf{x} \in C(\mathbf{z}, b)} f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} d\mathbf{z}}{\pi b^2} \\
&= 1 - \frac{\int_{\mathbf{z} \in C(0, b)} \int_{\mathbf{x} \in C(\mathbf{z}, b)} f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} d\mathbf{z}}{\pi b^2} \\
&= \gamma_O
\end{aligned}$$

(4)


となり，欠落率と生成率の期待値は常に一致する．誤差による点位置のずれは，通常はデータ領域と比べて十分小さいことを考えると，この仮定は普遍性が高いと言える．そこで以下では，欠落率の期待値のみをバッファリング精度の評価に用いる．

欠落率の期待値は，式(2)にある通り二重積分を含む式で与えられるが，多重積分は一般に大きな計算量を必要とするため，あまり操作性が高いとは言えない．そこでここでは，誤差分布の代表的なものの一つとして一様分布を取り上げ，より実用的な式(2)の表現を与える．

まず，点  $P$  の位置データが，正位置を中心とする半径  $r$  の円内で定義される一様分布に従って分布するものと仮定する．このとき式(2)は

$$\begin{aligned}
\gamma_O &= 1 - \frac{\int_{\mathbf{z} \in C(0, b)} \int_{\mathbf{x} \in C(\mathbf{z}, b)} f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} d\mathbf{z}}{\pi b^2} \\
&= 1 - \frac{\int_{\mathbf{z} \in C(0, b)} \int_{\mathbf{x} \in C(\mathbf{z}, b) \cap C(0, r)} \frac{1}{\pi r^2} d\mathbf{x} d\mathbf{z}}{\pi b^2} \\
&= 1 - \frac{\int_{\mathbf{z} \in C(0, b)} A(C(\mathbf{z}, b) \cap C(0, r)) d\mathbf{z}}{\pi^2 b^2 r^2}
\end{aligned}$$

(5)

となる．即ち， $C(0, b)$ 内の各点について，点を中心とする半径  $b$  の円と  $C(0, r)$ の重複部分（ 2) の面積を評価し，その積分を行えば良い．

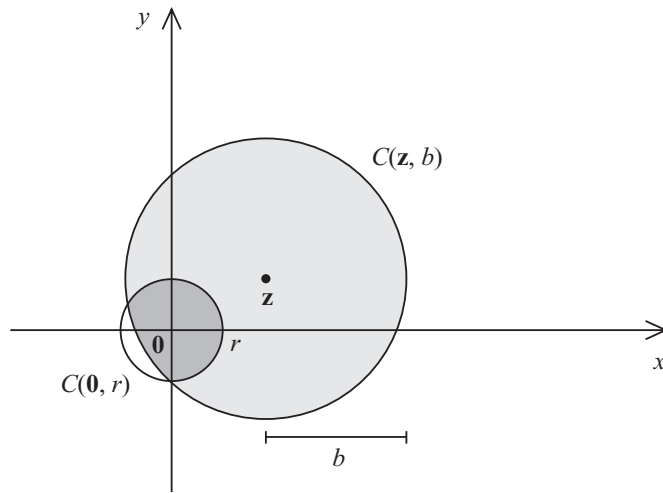


図 2  $C(z, b)$  の  $C(0, r)$  の重複部分

この面積は，

$$A(C(z, b) \cap C(0, r)) = \begin{cases} \pi r^2 & 0 \leq |z| < b - r \\ r^2 \cos^{-1} \left( \frac{|z|^2 + r^2 - b^2}{2|z|r} \right) - \frac{|z|^2 + r^2 - b^2}{4|z|^2} \sqrt{4|z|^2 r^2 - (|z|^2 + r^2 - b^2)^2} & b - r \leq |z| < b + r \\ +b^2 \cos^{-1} \left( \frac{|z|^2 + b^2 - r^2}{2|z|b} \right) - \frac{|z|^2 + b^2 - r^2}{4|z|^2} \sqrt{4|z|^2 b^2 - (|z|^2 + b^2 - r^2)^2} & b + r \leq |z| \\ 0 & \end{cases}$$

(6)

と書くことができる．ここで，第 2 段目を展開すると，

$$\begin{aligned}
& r^2 \cos^{-1} \left( \frac{|\mathbf{z}|^2 + r^2 - b^2}{2|\mathbf{z}|r} \right) - \frac{|\mathbf{z}|^2 + r^2 - b^2}{4|\mathbf{z}|^2} \sqrt{4|\mathbf{z}|^2 r^2 - (|\mathbf{z}|^2 + r^2 - b^2)^2} \\
& + b^2 \cos^{-1} \left( \frac{|\mathbf{z}|^2 + b^2 - r^2}{2|\mathbf{z}|b} \right) - \frac{|\mathbf{z}|^2 + b^2 - r^2}{4|\mathbf{z}|^2} \sqrt{4|\mathbf{z}|^2 b^2 - (|\mathbf{z}|^2 + b^2 - r^2)^2} \\
& = r^2 \cos^{-1} \left( \frac{|\mathbf{z}|^2 + r^2 - b^2}{2|\mathbf{z}|r} \right) - \frac{|\mathbf{z}|^2 + r^2 - b^2}{4|\mathbf{z}|^2} \sqrt{4|\mathbf{z}|^2 r^2 - (|\mathbf{z}|^4 + r^4 + b^4 + 2r^2 |\mathbf{z}|^2 - 2b^2 |\mathbf{z}|^2 - 2b^2 r^2)} \\
& + b^2 \cos^{-1} \left( \frac{|\mathbf{z}|^2 + b^2 - r^2}{2|\mathbf{z}|b} \right) - \frac{|\mathbf{z}|^2 + b^2 - r^2}{4|\mathbf{z}|^2} \sqrt{4|\mathbf{z}|^2 b^2 - (|\mathbf{z}|^4 + r^4 + b^4 - 2r^2 |\mathbf{z}|^2 + 2b^2 |\mathbf{z}|^2 - 2b^2 r^2)} \\
& = r^2 \cos^{-1} \left( \frac{|\mathbf{z}|^2 + r^2 - b^2}{2|\mathbf{z}|r} \right) - \frac{|\mathbf{z}|^2 + r^2 - b^2}{4|\mathbf{z}|^2} \sqrt{2r^2 |\mathbf{z}|^2 + 2b^2 |\mathbf{z}|^2 + 2b^2 r^2 - |\mathbf{z}|^4 - r^4 - b^4} \\
& + b^2 \cos^{-1} \left( \frac{|\mathbf{z}|^2 + b^2 - r^2}{2|\mathbf{z}|b} \right) - \frac{|\mathbf{z}|^2 + b^2 - r^2}{4|\mathbf{z}|^2} \sqrt{2r^2 |\mathbf{z}|^2 + 2b^2 |\mathbf{z}|^2 + 2b^2 r^2 - |\mathbf{z}|^4 - r^4 - b^4} \\
& = r^2 \cos^{-1} \left( \frac{|\mathbf{z}|^2 + r^2 - b^2}{2|\mathbf{z}|r} \right) + b^2 \cos^{-1} \left( \frac{|\mathbf{z}|^2 + b^2 - r^2}{2|\mathbf{z}|b} \right) - \frac{1}{2} \sqrt{2r^2 |\mathbf{z}|^2 + 2b^2 |\mathbf{z}|^2 + 2b^2 r^2 - |\mathbf{z}|^4 - r^4 - b^4}
\end{aligned}$$

(7)

となる．従って式(5)は，

$$\begin{aligned}
\gamma_O &= 1 - \frac{\int_{\mathbf{z} \in C(0,b)} A(C(\mathbf{z},b) \cap C(0,r)) d\mathbf{z}}{\pi^2 b^2 r^2} \\
&= 1 - \frac{\int_{\mathbf{z} \in C(0,b-r)} \pi r^2 d\mathbf{z}}{\pi^2 b^2 r^2} - \frac{\int_{\mathbf{z} \in C(0,b) \setminus C(0,b-r)} A(C(\mathbf{z},b) \cap C(0,r)) d\mathbf{z}}{\pi^2 b^2 r^2} \\
&= 1 - \left( \frac{b-r}{b} \right)^2 \\
&\quad - \frac{1}{\pi^2 b^2 r^2} \int_{\mathbf{z} \in C(0,b) \setminus C(0,b-r)} \left\{ r^2 \cos^{-1} \left( \frac{|\mathbf{z}|^2 + r^2 - b^2}{2|\mathbf{z}|r} \right) + b^2 \cos^{-1} \left( \frac{|\mathbf{z}|^2 + b^2 - r^2}{2|\mathbf{z}|b} \right) - \frac{1}{2} \sqrt{2r^2 |\mathbf{z}|^2 + 2b^2 |\mathbf{z}|^2 + 2b^2 r^2 - |\mathbf{z}|^4 - r^4 - b^4} \right\} d\mathbf{z} \\
&= 1 - \left( \frac{b-r}{b} \right)^2 \\
&\quad - \frac{2\pi}{\pi^2 b^2 r^2} \int_{b-r}^b \left\{ r^2 \cos^{-1} \left( \frac{z^2 + r^2 - b^2}{2rz} \right) + b^2 \cos^{-1} \left( \frac{z^2 + b^2 - r^2}{2bz} \right) - \frac{1}{2} \sqrt{2r^2 z^2 + 2b^2 z^2 + 2b^2 r^2 - z^4 - r^4 - b^4} \right\} z dz \\
&= 1 - \left( \frac{b-r}{b} \right)^2 \\
&\quad - \frac{2}{\pi b^2 r^2} \int_{b-r}^b \left\{ r^2 \cos^{-1} \left( \frac{z^2 + r^2 - b^2}{2rz} \right) + b^2 \cos^{-1} \left( \frac{z^2 + b^2 - r^2}{2bz} \right) - \frac{1}{2} \sqrt{2r^2 z^2 + 2b^2 z^2 + 2b^2 r^2 - z^4 - r^4 - b^4} \right\} z dz
\end{aligned}$$

(8)

と表される．

## 1.2 数値計算例

式(8)は通常の数値積分で評価できる形式であり，操作性は式(2)と比べて遙かに高い．そこで以下，具体的な数値計算を行う．

本論文では，欠落領域のバッファ領域に対する比率を扱っているので，式(8)において一般性を損なわずに  $b=1$  と置くことができる．すると式(8)は，

$$\gamma_0 = 2r - r^2 - \frac{2}{\pi r^2} \int_{1-r}^1 \left\{ r^2 \cos^{-1} \left( \frac{z^2 + r^2 - 1}{2rz} \right) + \cos^{-1} \left( \frac{z^2 - r^2}{2z} \right) - \frac{1}{2} \sqrt{2r^2 z^2 + 2z^2 + 2r^2 - z^4 - r^4 - 1} \right\} z dz$$

(9)

となる．式(9)からも明らかとなおり，欠落率  $\gamma_0$  は点の相対的な位置誤差  $r$  のみの関数として表される．従って，この式を評価することで，単一の点に関するバッファリング精度の一般的な結果を得ることができる．そこで，式(9)を用いて数値計算を行った結果を図 3 に示す．

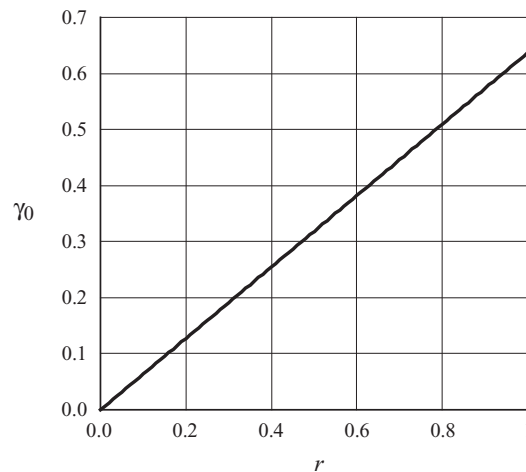


図 3 点の位置誤差  $r$  と欠落率  $\gamma_0$  の関係

この図を見ると，欠落率  $\gamma_0$  は点の位置誤差  $r$  にほぼ比例することが分かる．実際，回帰分析を行うと

$$\gamma_0 = 0.4185r$$

(10)

という式を得，回帰自体は有意水準 1% で有意となる．従って，単一の点に対するバッファリング誤差は，点の位置誤差  $r$  に比例すると言って良いであろう．

## 1.3 理論式の近似計算

次に，上の結果を解析的に分析するために，式(9)の近似展開を試みる．積分のために変数  $z$  を  $z=b-t$  と変換すると，

$$\begin{aligned}
\gamma_o &= 2r - r^2 \\
& - \frac{2}{\pi r^2} \int_0^r (1-t) \left\{ r^2 \cos^{-1} \left( \frac{(1-t)^2 + r^2 - 1}{2r(1-t)} \right) + \cos^{-1} \left( \frac{(1-t)^2 + 1 - r^2}{2(1-t)} \right) - \frac{1}{2} \sqrt{2r^2(1-t)^2 + 2(1-t)^2 + 2r^2 - (1-t)^4 - r^4 - 1} \right\} dt \\
& = 2r - r^2 \\
& - \frac{2}{\pi} \int_0^r \cos^{-1} \left( \frac{(1-t)^2 + r^2 - 1}{2r(1-t)} \right) dt - \frac{2}{\pi r^2} \int_0^r \cos^{-1} \left( \frac{(1-t)^2 + 1 - r^2}{2(1-t)} \right) dt + \frac{1}{\pi r^2} \int_0^r \sqrt{2r^2(1-t)^2 + 2(1-t)^2 + 2r^2 - (1-t)^4 - r^4 - 1} dt \\
& - \frac{2}{\pi} \int_0^r t \cos^{-1} \left( \frac{(1-t)^2 + r^2 - 1}{2r(1-t)} \right) dt - \frac{2}{\pi r^2} \int_0^r t \cos^{-1} \left( \frac{(1-t)^2 + 1 - r^2}{2(1-t)} \right) dt + \frac{1}{\pi r^2} \int_0^r t \sqrt{2r^2(1-t)^2 + 2(1-t)^2 + 2r^2 - (1-t)^4 - r^4 - 1} dt
\end{aligned}$$

(11)

となる．ここで，

$$\begin{aligned}
I_0 &= 2r - r^2 \\
I_1 &= -\frac{2}{\pi} \int_0^r \cos^{-1} \left( \frac{(1-t)^2 + r^2 - 1}{2r(1-t)} \right) dt \\
I_2 &= -\frac{2}{\pi r^2} \int_0^r \cos^{-1} \left( \frac{(1-t)^2 + 1 - r^2}{2(1-t)} \right) dt \\
I_3 &= \frac{1}{\pi r^2} \int_0^r \sqrt{2r^2(1-t)^2 + 2(1-t)^2 + 2r^2 - (1-t)^4 - r^4 - 1} dt \\
I_4 &= -\frac{2}{\pi} \int_0^r t \cos^{-1} \left( \frac{(1-t)^2 + r^2 - 1}{2r(1-t)} \right) dt \\
I_5 &= -\frac{2}{\pi r^2} \int_0^r t \cos^{-1} \left( \frac{(1-t)^2 + 1 - r^2}{2(1-t)} \right) dt \\
I_6 &= \frac{1}{\pi r^2} \int_0^r t \sqrt{2r^2(1-t)^2 + 2(1-t)^2 + 2r^2 - (1-t)^4 - r^4 - 1} dt
\end{aligned}$$

(12)

とおき，各項の近似表現を計算する．なお以下では，バッファ半径は点の位置誤差と比べて十分大きいものと仮定し， $r \ll 1$  とする．



$$\begin{aligned}
I_1 &= -\frac{2}{\pi} \int_0^r \cos^{-1} \left( \frac{(1-t)^2 + r^2 - 1}{2r(1-t)} \right) dt \\
&= -\frac{2}{\pi} \int_0^r \cos^{-1} \left( \frac{t^2 - 2t + r^2}{2r(1-t)} \right) dt \\
&= -\frac{2}{\pi} \int_0^r \cos^{-1} \left( -\frac{t}{2r} + \frac{-t + r^2}{2r(1-t)} \right) dt \\
&\approx -\frac{2}{\pi} \int_0^r \cos^{-1} \left( -\frac{t}{r} \right) dt = \frac{2r}{\pi} \int_0^{-1} \cos^{-1} u dt \\
&= \frac{2r}{\pi} \left[ u \cos^{-1} u - \sqrt{1-u^2} \right]_0^{-1} \\
&= \frac{2r}{\pi} (1 - \pi)
\end{aligned}$$

(13)

$$\begin{aligned}
I_2 &= -\frac{2}{\pi r^2} \int_0^r \cos^{-1} \left( \frac{(1-t)^2 + 1 - r^2}{2(1-t)} \right) dt \\
&= -\frac{2}{\pi r^2} \int_0^r \cos^{-1} \left( 1 - \frac{r^2 - t^2}{2(1-t)} \right) dt
\end{aligned}$$

(14)

ところで,  $\cos x$  を Taylor 展開し,  $x$  が 0 に近いときに 2 次項までの近似を行うと,

$$\begin{aligned}
\cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots \\
&\approx 1 - \frac{x^2}{2}
\end{aligned}$$

(15)

が成立する. ここから

$$\cos^{-1}(1-x) \approx \sqrt{2x}$$

(16)

を得る. 上の近似式を式(15)に適用すると,

$$\begin{aligned}
I_2 &= -\frac{2}{\pi r^2} \int_0^r \cos^{-1} \left( 1 - \frac{r^2 - t^2}{2(1-t)} \right) dt \\
&\approx -\frac{2}{\pi r^2} \int_0^r \sqrt{\frac{r^2 - t^2}{1-t}} dt \\
&\approx -\frac{2}{\pi r^2} \int_0^r \sqrt{r^2 - t^2} dt \\
&= -\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

(17)

$$\begin{aligned}
I_3 &= \frac{1}{\pi r^2} \int_0^r \sqrt{2r^2(1-t)^2 + 2(1-t)^2 + 2r^2 - (1-t)^4 - r^4 - 1} dt \\
&= \frac{1}{\pi r^2} \int_0^r \sqrt{2r^2 - 4r^2t + 2r^2t^2 + 2 - 4t + 2t^2 + 2r^2 - 1 + 4t - 6t^2 + 4t^3 - t^4 - r^4 - 1} dt \\
&= \frac{1}{\pi r^2} \int_0^r \sqrt{4r^2 - 4r^2t + 2r^2t^2 - 4t^2 + 4t^3 - t^4 - r^4} dt \\
&\approx \frac{2}{\pi r^2} \int_0^r \sqrt{r^2 - t^2} dt \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

(18)

$$\begin{aligned}
I_4 &= -\frac{2}{\pi} \int_0^r t \cos^{-1} \left( \frac{(1-t)^2 + r^2 - 1}{2r(1-t)} \right) dt \\
&= -\frac{2}{\pi} \int_0^r t \cos^{-1} \left( -\frac{t}{2r} + \frac{-t + r^2}{2r(1-t)} \right) dt \\
&\approx -\frac{2}{\pi} \int_0^r t \cos^{-1} \left( -\frac{t}{r} \right) dt = -\frac{2r^2}{\pi} \int_0^{-1} u \cos^{-1} u dt \\
&= -\frac{2r^2}{\pi} \left[ \frac{2u^2 - 1}{4} \cos^{-1} u - \frac{u}{4} \sqrt{1 - u^2} \right]_0^{-1} \\
&= -\frac{3}{4} r^2
\end{aligned}$$

(19)

$$\begin{aligned}
I_5 &= -\frac{2}{\pi r^2} \int_0^r t \cos^{-1} \left( \frac{(1-t)^2 + 1 - r^2}{2(1-t)} \right) dt \\
&\approx -\frac{2}{\pi r^2} \int_0^r t \sqrt{r^2 - t^2} dt \\
&= -\frac{2}{\pi r^2} \left[ -\frac{1}{3} (r^2 - t^2)^{\frac{3}{2}} \right]_0^r \\
&= -\frac{2r}{3\pi}
\end{aligned}$$

(20)

$$\begin{aligned}
I_6 &= \frac{1}{\pi r^2} \int_0^r t \sqrt{2r^2(1-t)^2 + 2(1-t)^2 + 2r^2 - (1-t)^4 - r^4 - 1} dt \\
&= \frac{1}{\pi r^2} \int_0^r t \sqrt{4r^2 - 4r^2t + 2r^2t^2 - 4t^2 + 4t^3 - t^4 - r^4} dt \\
&\approx \frac{2}{\pi r^2} \int_0^r t \sqrt{r^2 - t^2} dt \\
&= \frac{2}{\pi r^2} \left[ -\frac{1}{3} (r^2 - t^2)^{\frac{3}{2}} \right]_0^r \\
&= \frac{2r}{3\pi}
\end{aligned}$$

(21)

上の結果をまとめると，

$$\begin{aligned}
\gamma_0 &= I_0 + I_1 + I_2 + I_3 + I_4 + I_5 + I_6 \\
&\approx 2r - r^2 + \frac{2r}{\pi}(1-\pi) - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{3}{4}r^2 - \frac{2r}{3\pi} + \frac{2r}{3\pi} \\
&= \frac{2}{\pi}r - \frac{3}{2}r^2 \\
&= \left( \frac{2}{\pi} - \frac{3}{2}r \right) r
\end{aligned}$$

(22)

となる．さらに  $r \ll 1$  を考えれば，

$$\begin{aligned}
\gamma_0 &\approx \frac{2}{\pi}r \\
&= 0.6366r
\end{aligned}$$

(23)

という近似も可能であるが，残念ながら，式(10)における  $r$  の係数と比較すると乖離が大きく，近似式としては実用的

とは言い難いかもしれない。数値的に解析すると、上の近似展開のうち、 $I_1, I_2, I_3$ の近似誤差の影響が大きく、これらについてより良い近似式を得ることで、式(10)を解析的に導出することが可能になるであろうと思われる。

点が複数存在する場合には、点の位置誤差が相互に独立に与えられるのであれば、上の方法がそのまま適用できる。即ち、式(1)と同様の計算を全ての点に対して行い、それを全領域  $R$  で積分すれば良い。しかしながら、点の位置誤差が互いに強い相関を持っている場合には、式(1)は極めて複雑な形になり、上の方法は必ずしも実用的とは言えない。そのようなときには、モンテカルロシミュレーションによって点の分布及びそのバッファ領域を与え、バッファリング精度の評価を行う方が良いであろう。

## 2. 線分に対するバッファリング操作の精度

### 2.1 理論的枠組み

次に、領域  $R$  内において、2点  $P_1, P_2$  を両端点とする長さ  $2l$  の線分  $L$  に対するバッファリング操作を考える。バッファ半径は  $b$ 、バッファ領域は  $B(L, b)$  とそれぞれ表す。また後者については、点  $P_1$  及び点  $P_2$  のみによって生成されるバッファ領域をそれぞれ  $BP(P_1, b), BP(P_2, b)$ 、線分  $L$  上の他の点によっても生成されるバッファ領域を  $BL(L, b)$  と表記する (図 4)。

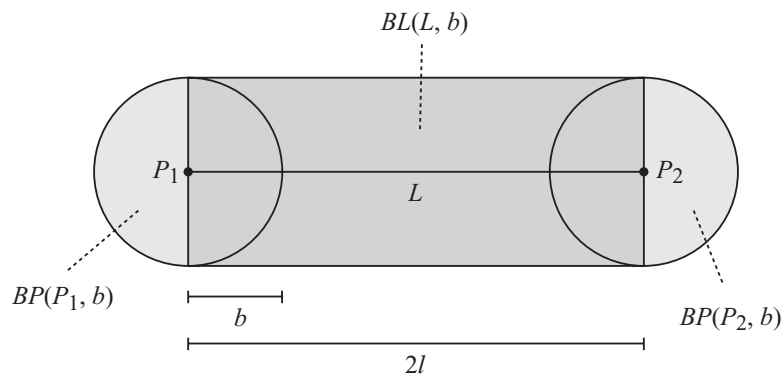


図 4 線分  $L$  に関するバッファ領域

定義より明らかに

$$B(L, b) = BP(P_1, b) \cup BP(P_2, b) \cup BL(L, b)$$

(24)

である。

次に、2点間の midpoint の位置ベクトルを原点、2点  $P_1, P_2$  を結ぶ直線を  $x$  軸とする座標系をとる (図 5)。すると、点  $P_1, P_2$  の座標はそれぞれ  $(l, 0), (-l, 0)$  と表される。

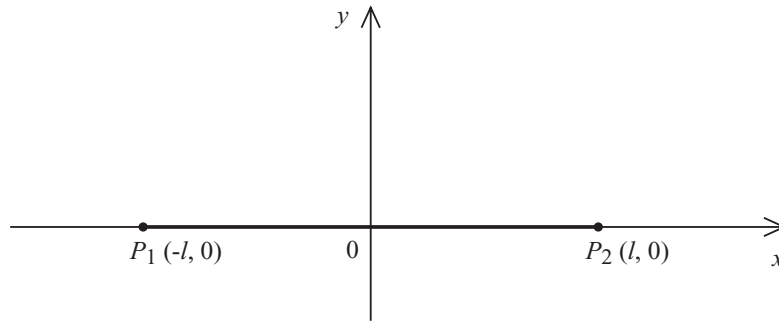


図 5 座標系

$P_1, P_2$  の位置データは、前節と同様、それぞれ確率的に決定されるものとし、その実現値を  $P_1', P_2'$ 、座標を  $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ 、確率密度関数を  $f(x_1, y_1, x_2, y_2)$  とする。また、2 点  $P_1', P_2'$  を両端点とする線分を  $L'$ 、その各バッファ領域を  $B(L', b), BP(P_1', b), BP(P_2', b), BL(L', b)$  とする。

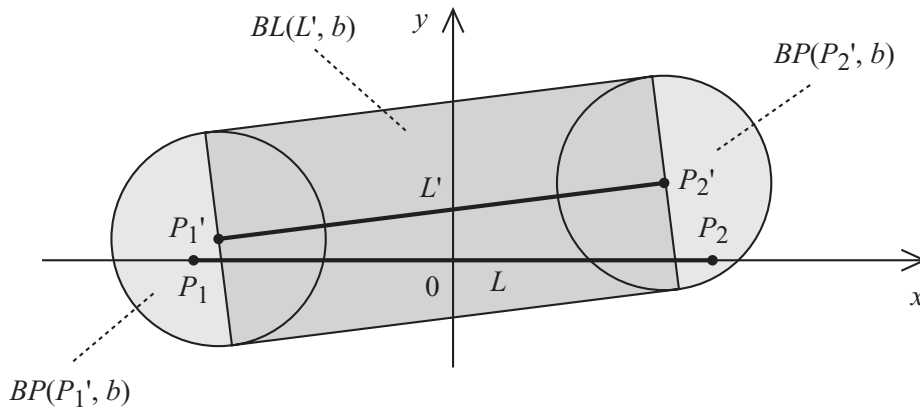


図 6 データ上のバッファ領域

バッファリング精度の評価には、ここでも欠落率の期待値を用いる。その計算にはまず、任意の点  $Q(x_0, y_0)$  が  $B(L', b)$  に含まれる確率を求める。

点  $Q(x_0, y_0)$  が  $B(L', b)$  に含まれるには、 $C(Q, b)$  が  $L'$  と交点を持てば良い。従って、点  $Q$  が  $B(L', b)$  に含まれる確率は、

$$\Pr[Q \in B(L', b)] = \Pr[C(Q, b) \cap L' \neq \emptyset]$$

(25)

と表される。ここで、表示関数 (indicator function)

$$\sigma(x_0, y_0, x_1, y_1, x_2, y_2) = \begin{cases} 1 & \text{if } Q \in B(L', b) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

(26)

と定義すると，上式は

$$\Pr[Q \in B(L', b)] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, y_1, x_2, y_2) \sigma(x_0, y_0, x_1, y_1, x_2, y_2) dx_1 dy_1 dx_2 dy_2$$

(27)

と表される．

次に，式(27)における表示関数  $\sigma(x_0, y_0, x_1, y_1, x_2, y_2)$  の具体的な形を考える．いま，点  $P_1'(x_1, y_1)$  を固定し，点  $P_2'(x_2, y_2)$  の取りうる範囲を考える．即ちこれは，線分  $P_1'P_2'$  が  $C(Q, b)$  と交点を持つための条件である．

まず， $P_1'$  が  $C(Q, b)$  の内部にある場合には，点  $P_2'$  ( $x_2, y_2$ ) の位置によらず線分  $P_1'P_2'$  は常に  $C(Q, b)$  と交点を持つ．

一方  $P_1'$  が  $C(Q, b)$  の外部にある場合には， $P_2'$  の変域は  $P_1'$  から  $C(Q, b)$  へ引いた接線によって定められる，図 7 の灰色部分で与えられる．

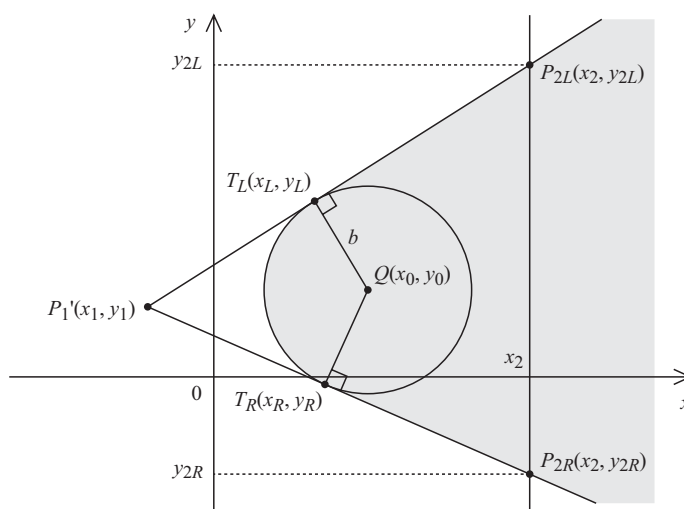


図 7 点  $P_1'(x_1, y_1)$  を固定したときに  $P_2'(x_2, y_2)$  の取りうる範囲

2 接線と円  $C(Q, b)$  との接点のうち，点  $P_1'(x_1, y_1)$  から見て左（反時計回り）側にあるものを  $T_L(x_L, y_L)$ ，右（時計回り）側にあるものを  $T_R(x_R, y_R)$  とおく．また，それぞれの接線の直線  $x=x_2$  との交点をそれぞれ  $P_{2L}(x_2, y_{2L})$ ， $P_{2R}(x_2, y_{2R})$  とおく．各接点は，

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = b^2$$

(28)

及び， $P_1' T_L$  と  $QT_L$ ， $P_1' T_R$  と  $QT_R$  の各直交条件より

$$(x_0 - x)(x_1 - x) + (y_0 - y)(y_1 - y) = 0$$

(29)

を満たす連立方程式の解として与えられる．両者の差を取ると

$$(x_1 - x_0)x - (x_1 - x_0)x_0 + (y_1 - y_0)y - (y_1 - y_0)y_0 - b^2 = 0$$

(30)

であり，これを代入して解くと，

$$x = \frac{-b^2(x_0 - x_1) + x_0 \left\{ (x_0 - x_1)^2 + (y_0 - y_1)^2 \right\} \pm \sqrt{b^2(y_0 - y_1) \left\{ -b^2 + (x_0 - x_1)^2 + (y_0 - y_1)^2 \right\}}}{(x_0 - x_1)^2 + (y_0 - y_1)^2}$$

(31)

$$y = -\frac{\left\{ (x_0 - x_1)^2 + (y_0 - y_1)^2 \right\} \left\{ b^2 - y_0(y_0 - y_1) \right\} + b(x_0 - x_1) \left\{ -b(x_0 - x_1) \mp (y_0 - y_1) \sqrt{-b^2 + (x_0 - x_1)^2 + (y_0 - y_1)^2} \right\}}{y_0 - y_1}$$

(32)

を得る（複号同順）．これらのうち， $x_L, x_R$  はそれぞれ

$$x_L = \frac{-b^2(x_0 - x_1) + x_0 \left\{ (x_0 - x_1)^2 + (y_0 - y_1)^2 \right\} - \operatorname{sgn}(y_0 - y_1) \sqrt{b^2(y_0 - y_1) \left\{ -b^2 + (x_0 - x_1)^2 + (y_0 - y_1)^2 \right\}}}{(x_0 - x_1)^2 + (y_0 - y_1)^2}$$

(33)

$$x_R = \frac{-b^2(x_0 - x_1) + x_0 \left\{ (x_0 - x_1)^2 + (y_0 - y_1)^2 \right\} + \operatorname{sgn}(y_0 - y_1) \sqrt{b^2(y_0 - y_1) \left\{ -b^2 + (x_0 - x_1)^2 + (y_0 - y_1)^2 \right\}}}{(x_0 - x_1)^2 + (y_0 - y_1)^2}$$

(34)

となる．但し，

$$\operatorname{sgn}(y_0 - y_1) = \begin{cases} 1 & y_0 \geq y_1 \\ -1 & y_0 < y_1 \end{cases}$$

(35)

である．一方  $y_L, y_R$  はそれぞれ

$$y = -\frac{\{(x_0 - x_1)^2 + (y_0 - y_1)^2\} \{b^2 - y_0(y_0 - y_1)\} + b(x_0 - x_1) \left\{ -b(x_0 - x_1) \mp (y_0 - y_1) \sqrt{-b^2 + (x_0 - x_1)^2 + (y_0 - y_1)^2} \right\}}{y_0 - y_1}$$

$$= -\frac{\{(x_0 - x_1)^2 + (y_0 - y_1)^2\} \{b^2 - y_0(y_0 - y_1)\} - b^2(x_0 - x_1)^2}{y_0 - y_1} \pm b(x_0 - x_1) \sqrt{-b^2 + (x_0 - x_1)^2 + (y_0 - y_1)^2}$$

(36)

より，

$$y_R = -\frac{\{(x_0 - x_1)^2 + (y_0 - y_1)^2\} \{b^2 - y_0(y_0 - y_1)\} - b^2(x_0 - x_1)^2}{y_0 - y_1} - \operatorname{sgn}(x_0 - x_1) b(x_0 - x_1) \sqrt{-b^2 + (x_0 - x_1)^2 + (y_0 - y_1)^2}$$

(37)

$$y_L = -\frac{\{(x_0 - x_1)^2 + (y_0 - y_1)^2\} \{b^2 - y_0(y_0 - y_1)\} - b^2(x_0 - x_1)^2}{y_0 - y_1} + \operatorname{sgn}(x_0 - x_1) b(x_0 - x_1) \sqrt{-b^2 + (x_0 - x_1)^2 + (y_0 - y_1)^2}$$

(38)

である．なお，各接線の方程式は

$$y = \frac{y_L - y_1}{x_L - x_1} (x - x_1) + y_1$$

(39)

$$y = \frac{y_R - y_1}{x_R - x_1} (x - x_1) + y_1$$

(40)



である．

また，各接線と直線  $x = x_2$  の交点は以下のように求めることができる．接線の方程式を

$$y = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} (x - x_1) + y_1 \quad (41)$$

即ち

$$(y_2 - y_1)x - (x_2 - x_1)y - x_1y_2 + y_1x_2 = 0 \quad (42)$$

と書くと，点  $Q$  からこの直線までの距離は  $b$  であるから，

$$\frac{(y_2 - y_1)x_0 - (x_2 - x_1)y_0 - x_1y_2 + y_1x_2}{\sqrt{(y_2 - y_1)^2 + (x_2 - x_1)^2}} = b \quad (43)$$

を  $y_2$  について解けばよい．その結果，

$$y_{2R} = \frac{(x_0 - x_1)\{(y_0 - y_1)x_2 + (x_0y_1 - x_1y_0)\} - b^2y_1}{-b^2 + (x_0 - x_1)^2} + \operatorname{sgn}\{(x_0 - x_1)(x_1 - x_2)\} \frac{b(x_1 - x_2)\sqrt{-b^2 + (x_0 - x_1)^2 + (y_0 - y_1)^2}}{-b^2 + (x_0 - x_1)^2} \quad (44)$$

$$y_{2L} = \frac{(x_0 - x_1)\{(y_0 - y_1)x_2 + (x_0y_1 - x_1y_0)\} - b^2y_1}{-b^2 + (x_0 - x_1)^2} - \operatorname{sgn}\{(x_0 - x_1)(x_1 - x_2)\} \frac{b(x_1 - x_2)\sqrt{-b^2 + (x_0 - x_1)^2 + (y_0 - y_1)^2}}{-b^2 + (x_0 - x_1)^2} \quad (45)$$

を得る．

次に， $P_1'$  の位置に応じて具体的な点  $P_2'$  ( $x_2, y_2$ ) の変域を考える．まず，図 8 にあるように，円  $C(Q, b)$  によって領域を 3 つに分割する．

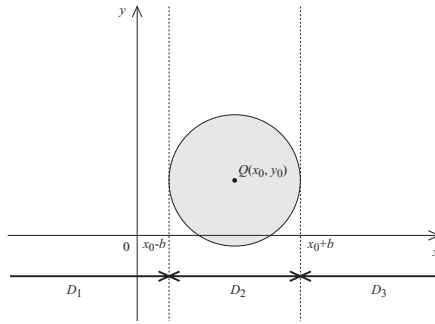


図 8  $C(Q, b)$ による領域の分割

1.  $P_1' \subset D_1, P_2' \subset D_1$ の場合

この場合，線分  $P_1'P_2'$ は  $C(Q, b)$ と交点を持つことがない．

2.  $P_1' \subset D_1, P_2' \subset D_2$ の場合

この場合， $y_2$ の変域  $\{y_{2\min}, y_{2\max}\}$ は以下の式で与えられる（図 9）． $y_0 \leq y_1$ の時には

$$\{y_{2\min}, y_{2\max}\} = \begin{cases} \left\{ y_0 - \sqrt{b^2 - (x_2 - x_0)^2}, y_0 + \sqrt{b^2 - (x_2 - x_0)^2} \right\} & (x_0 - b \leq x_2 \leq x_R) \\ \left\{ y_{2R}, y_0 + \sqrt{b^2 - (x_2 - x_0)^2} \right\} & (x_R < x_2 \leq x_L) \\ \{y_{2R}, y_{2L}\} & (x_L < x_2 \leq x_0 + b) \end{cases}$$

(46)

また  $y_1 < y_0$ の時には

$$\{y_{2\min}, y_{2\max}\} = \begin{cases} \left\{ y_0 - \sqrt{b^2 - (x_2 - x_0)^2}, y_0 + \sqrt{b^2 - (x_2 - x_0)^2} \right\} & (x_0 - b \leq x_2 \leq x_L) \\ \left\{ y_0 - \sqrt{b^2 - (x_2 - x_0)^2}, y_{2L} \right\} & (x_L < x_2 \leq x_R) \\ \{y_{2R}, y_{2L}\} & (x_R < x_2 \leq x_0 + b) \end{cases}$$

(47)

である．

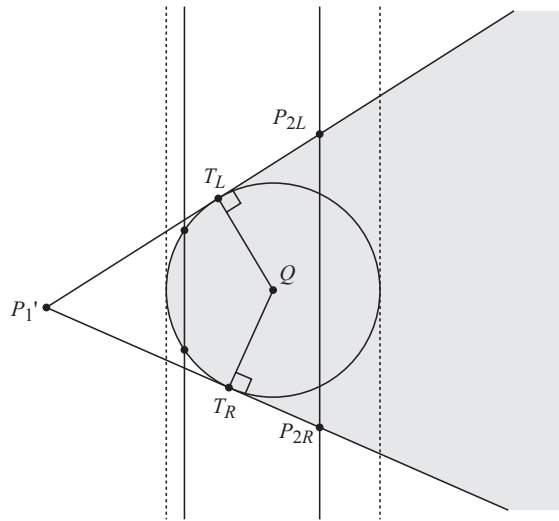


図 9  $P_1' \in D_1, P_2' \in D_2$  の場合

3.  $P_1' \in D_1, P_2' \in D_3$  の場合

この場合,  $y_2$  の変域  $\{y_{2\min}, y_{2\max}\}$  は

$$\{y_{2\min}, y_{2\max}\} = \{y_{2R}, y_{2L}\}$$

(48)

である (図 10).

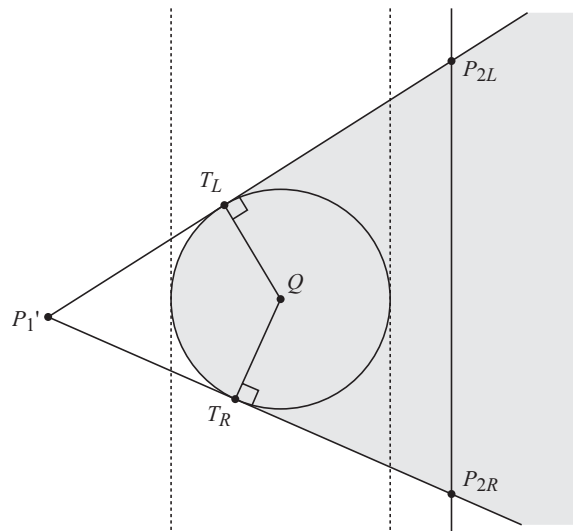


図 10  $P_1' \in D_1, P_2' \in D_3$  の場合

4.  $P_1' \subset D_2, P_2' \subset D_1$  の場合

この場合，図 11 を用いて考えると， $y_0 \leq y_1$  の時には

$$\{y_{2\min}, y_{2\max}\} = \{-\infty, y_{2R}\}$$

(49)

$y_1 < y_0$  の時には，

$$\{y_{2\min}, y_{2\max}\} = \{y_{2L}, \infty\}$$

(50)

であることがわかる．

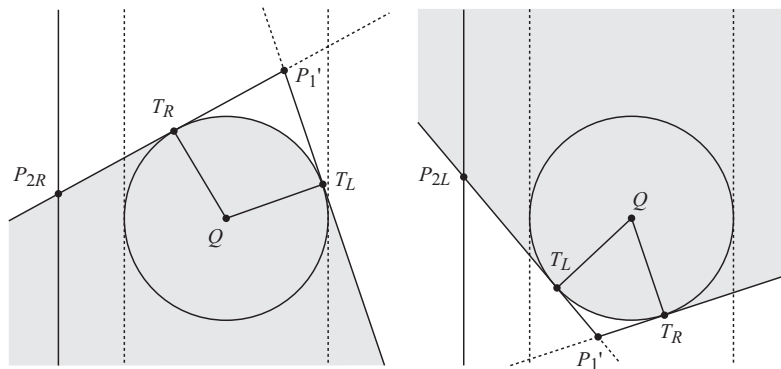


図 11  $P_1' \subset D_2, P_2' \subset D_1$  の場合

5.  $P_1' \subset D_2, P_2' \subset D_2$  の場合

図 12 を用いて考えると， $y_0 \leq y_1$  の時には

$$\{y_{2\min}, y_{2\max}\} = \begin{cases} \{-\infty, y_{2R}\} & x_0 - b \leq x_2 \leq x_R \\ \{-\infty, y_0 + \sqrt{b^2 - (x_2 - x_0)^2}\} & x_R < x_2 \leq x_L \\ \{-\infty, y_{2L}\} & x_L < x_2 \leq x_0 + b \end{cases}$$

(51)

であり， $y_1 < y_0$  の時には

$$\{y_{2\min}, y_{2\max}\} = \begin{cases} \{y_{2L}, \infty\} & x_0 - b \leq x_2 \leq x_L \\ \left\{y_0 - \sqrt{b^2 - (x_2 - x_0)^2}, \infty\right\} & x_L < x_2 \leq x_R \\ \{y_{2R}, \infty\} & x_R < x_2 \leq x_0 + b \end{cases}$$

(52)

となる。

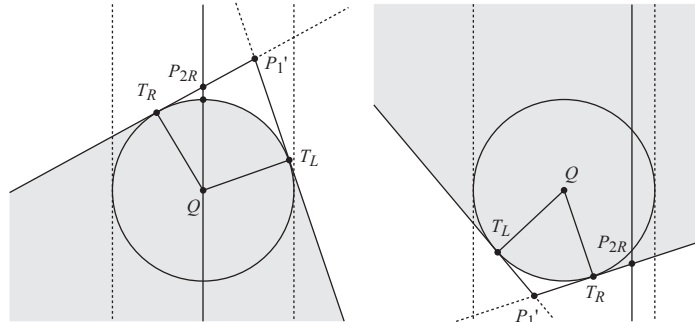


図 12  $P_1' \in D_2, P_2' \in D_2$  の場合

6.  $P_1' \in D_2, P_2' \in D_3$  の場合

この場合，前と同様に考えれば， $y_0 \leq y_1$  の時には

$$\{y_{2\min}, y_{2\max}\} = \{-\infty, y_{2L}\}$$

(53)

$y_1 < y_0$  の時には，

$$\{y_{2\min}, y_{2\max}\} = \{y_{2R}, \infty\}$$

(54)

であることがわかる。

7.  $P_1' \in D_3, P_2' \in D_1$  の場合

この場合， $y_2$  の変域  $\{y_{2\min}, y_{2\max}\}$  は

$$\{y_{2\min}, y_{2\max}\} = \{y_{2L}, y_{2R}\}$$

(55)

である (図 13).

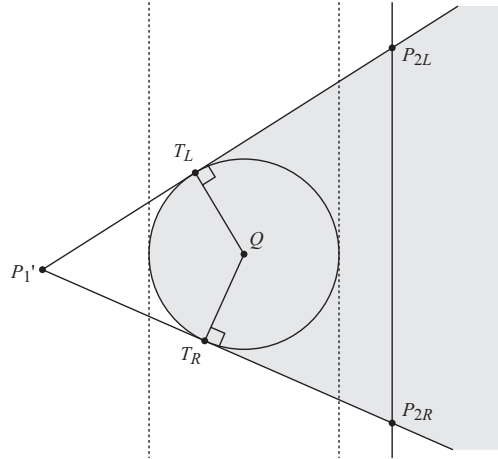


図 13  $P_1' \in D_3, P_2' \in D_1$  の場合

8.  $P_1' \in D_3, P_2' \in D_2$  の場合

この場合,  $y_2$  の変域  $\{y_{2\min}, y_{2\max}\}$  は以下の式で与えられる (図 14).  $y_0 \leq y_1$  の時には

$$\{y_{2\min}, y_{2\max}\} = \begin{cases} \{y_{2L}, y_{2R}\} & (x_0 - b \leq x_2 \leq x_R) \\ \{y_{2L}, y_0 + \sqrt{b^2 - (x_2 - x_0)^2}\} & (x_R < x_2 \leq x_L) \\ \{y_0 - \sqrt{b^2 - (x_2 - x_0)^2}, y_0 + \sqrt{b^2 - (x_2 - x_0)^2}\} & (x_L < x_2 \leq x_0 + b) \end{cases}$$

(56)

また  $y_1 < y_0$  の時には

$$\{y_{2\min}, y_{2\max}\} = \begin{cases} \{y_{2L}, y_{2R}\} & (x_0 - b \leq x_2 \leq x_L) \\ \{y_0 + \sqrt{b^2 - (x_2 - x_0)^2}, y_{2R}\} & (x_L < x_2 \leq x_R) \\ \{y_0 - \sqrt{b^2 - (x_2 - x_0)^2}, y_0 + \sqrt{b^2 - (x_2 - x_0)^2}\} & (x_R < x_2 \leq x_0 + b) \end{cases}$$

である。

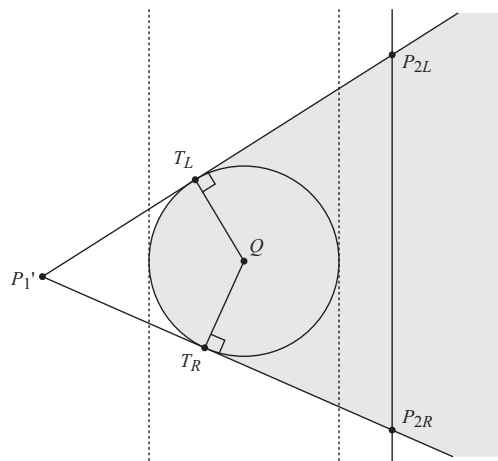


図 14  $P_1' \in D_3, P_2' \in D_2$  の場合

### 9. $P_1' \in D_3, P_2' \in D_3$ の場合

この場合，線分  $P_1'P_2'$  は  $C(Q, b)$  と交点を持つことがない。

以上の結果によって与えられる領域を  $Y_2(x_1, y_1, x_2)$  と書くと，式(27)は

$$\Pr[Q \in B(L', b)] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{y_2 \in Y_2(x_1, y_1, x_2)} f(x_1, y_1, x_2, y_2) dy_2 dx_2 dy_1 dx_1$$

(58)

となる。

## 2.2 変数変換による計算方法

式(27)における表示関数  $\sigma(x_0, y_0, x_1, y_1, x_2, y_2)$  の形については，変数変換による計算も可能である。即ち式(27)では，点  $Q(x_0, y_0)$  をバッファ領域に含むような線分の集合を，端点の全分布に関して順次積分して考えているが，この順序を，まず最初に  $x$  軸と同一角度をなす全ての線分の集合を考え，次に，角度に関してそれらの測度を積分する，という順序に変更する。即ち， $x$  軸と角度  $\theta$  をなす線分のうちで， $y$  軸方向の高さ  $v=w$  であるものの集合を考える。

いま， $x$  軸に対して反時計回りに角度  $\theta$  をなす線分のみを考えるために，原点を中心として座標系を反時計回りに  $\theta$  だけ回転させる（図 15）。すると，点  $Q(x_0, y_0)$  の新しい座標系での点位置  $(u_0, v_0)$  は，

$$\begin{aligned} u_0 &= x_0 \cos \theta + y_0 \sin \theta \\ v_0 &= -x_0 \sin \theta + y_0 \cos \theta \end{aligned}$$

(59)

となる。また、点  $P_1, P_2, P_1', P_2'$  の座標をそれぞれ  $(u_1, v_1), (u_2, v_2), (u_1', v_1'), (u_2', v_2')$  とすると、

$$\begin{aligned} (u_1, v_1) &= (-l \cos \theta, l \sin \theta) \\ (u_2, v_2) &= (l \cos \theta, -l \sin \theta) \\ (u_1', v_1') &= (x_1 \cos \theta + y_1 \sin \theta, -x_1 \sin \theta + y_1 \cos \theta) \\ (u_2', v_2') &= (x_2 \cos \theta + y_2 \sin \theta, -x_2 \sin \theta + y_2 \cos \theta) \end{aligned}$$

(60)

という関係が成り立つ。

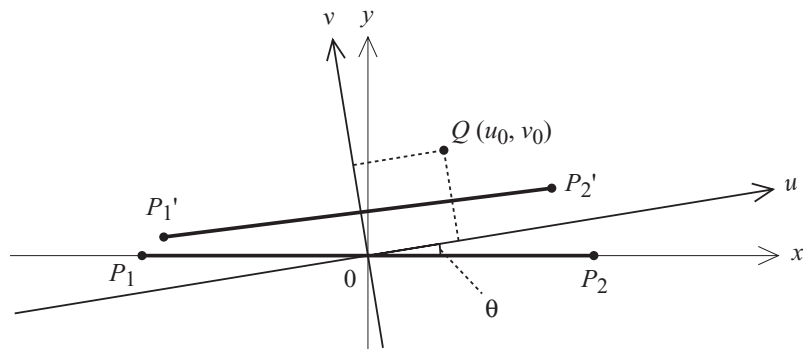


図 15 新しい座標系

さらに  $v_1' = v_2' = w$  であるので、変数  $u_1', u_2', w, \theta$  と  $x_1, y_1, x_2, y_2$  の間には、

$$\begin{aligned} x_1 &= u_1' \cos \theta - w \sin \theta \\ y_1 &= u_1' \sin \theta + w \cos \theta \\ x_2 &= u_2' \cos \theta - w \sin \theta \\ y_2 &= u_2' \sin \theta + w \cos \theta \end{aligned}$$

(61)

即ち、



$$\begin{aligned}
u_1' &= x_1 \cos \theta + y_1 \sin \theta \\
u_2' &= x_2 \cos \theta + y_2 \sin \theta \\
w &= -x_1 \sin \theta + y_1 \cos \theta \\
&= -x_2 \sin \theta + y_2 \cos \theta
\end{aligned}$$

(62)

という関係が成り立つ．これを整理すると，

$$\begin{aligned}
u_1' &= \frac{-x_1^2 + x_1 x_2 - y_1^2 + y_1 y_2}{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}} \\
u_2' &= \frac{-x_2^2 - x_1 x_2 - y_2^2 - y_1 y_2}{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}} \\
w &= \frac{-x_1 y_2 + x_2 y_1}{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}} \\
\theta &= \tan^{-1} \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}
\end{aligned}$$

(63)

となる．従って，点  $P_1'$ ， $P_2'$  の従う確率密度関数を  $u_1'$ ， $u_2'$ ， $w$ ， $\theta$  によって  $g(u_1', u_2', w, \theta)$  とすると，点  $Q$  が  $B(L', b)$  に含まれる確率は，式(60)より

$$\begin{aligned}
\Pr[Q \in B(L', b)] &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, y_1, x_2, y_2) \sigma(x_0, y_0, x_1, y_1, x_2, y_2) dx_1 dy_1 dx_2 dy_2 \\
&= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |J| g(u_1', u_2', w, \theta) \rho(u_0, v_0, u_1', u_2', w, \theta) du_1' du_2' dw d\theta
\end{aligned}$$

(64)

となる．但しここで  $\rho(u_0, v_0, u_1', u_2', w, \theta)$  は表示関数であり，

$$\rho(u_0, v_0, u_1', u_2', w, \theta) = \begin{cases} 1 & \text{if } Q \in B(L', b) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

(65)

と定義される，また  $J$  はヤコビアンであり，

$$\begin{aligned}
|J| &= \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial u_1'} & \frac{\partial x_1}{\partial u_2'} & \frac{\partial x_1}{\partial w} & \frac{\partial x_1}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y_1}{\partial u_1'} & \frac{\partial y_1}{\partial u_2'} & \frac{\partial y_1}{\partial w} & \frac{\partial y_1}{\partial \theta} \\ \frac{\partial x_2}{\partial u_1'} & \frac{\partial x_2}{\partial u_2'} & \frac{\partial x_2}{\partial w} & \frac{\partial x_2}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y_2}{\partial u_1'} & \frac{\partial y_2}{\partial u_2'} & \frac{\partial y_2}{\partial w} & \frac{\partial y_2}{\partial \theta} \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} \cos \theta & 0 & -\sin \theta & -w \cos \theta - u_1' \sin \theta \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta & -w \cos \theta - u_2' \sin \theta \\ \sin \theta & 0 & \cos \theta & -u_1' \cos \theta - w \sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta & -u_2' \cos \theta - w \sin \theta \end{vmatrix} \\
&= |u_1' - u_2'|
\end{aligned}$$

(66)

である。従って式(64)は、

$$\begin{aligned}
\Pr[Q \in B(L', b)] &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, y_1, x_2, y_2) \sigma(x_0, y_0, x_1, y_1, x_2, y_2) dx_1 dy_1 dx_2 dy_2 \\
&= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |u_1' - u_2'| g(u_1', u_2', w, \theta) \rho(u_0, v_0, u_1', u_2', w, \theta) du_1' du_2' dw d\theta
\end{aligned}$$

(67)

となる。

次に、上式における表示関数  $\rho(u_0, v_0, u_1', u_2', w, \theta)$  の具体的な形を考える。直線  $v=w$  が  $C(Q, b)$  と交点を持つための条件は、

$$v_0 - b \leq w \leq v_0 + b$$

(68)

である。このとき、2つの交点の  $u$  座標値はそれぞれ

$$u_0 \pm \sqrt{b^2 - (w - v_0)^2}$$

(69)

である．2つの交点のうち， $u$  座標値の小さな方を  $D_-$ ，大きな方を  $D_+$ ，また， $Q$  から直線  $W: v=w$  に下ろした垂線の足を  $T$  と表す（図 16）．

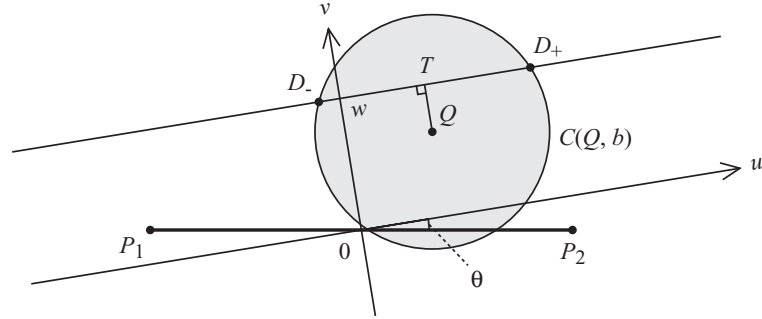


図 16  $C(Q, b)$  と直線  $v=w$

直線  $W$  を，3点  $D_-$ ， $T$ ， $D_+$  によって4つの区間  $W_1$ ， $W_2$ ， $W_3$ ， $W_4$  に分割する（図 17）．すると，点  $Q$  がバッファ領域  $BP(P_1', b)$  に含まれるための条件は， $W_-(P_1)$ ， $W_+(P_1)$  をそれぞれ直線  $W$  上の  $P_1$  よりも左側，右側の区間として，

$$P_1' \subset W_3, P_2' \subset ((W_3 \cup W_4) \cap W_+(P_1'))$$

(70)

あるいは

$$P_1' \subset W_2, P_2' \subset ((W_1 \cup W_2) \cap W_-(P_1'))$$

(71)

となる．同様に，点  $Q$  がバッファ領域  $BP(P_2', b)$  に含まれるための条件は，

$$P_1' \subset ((W_1 \cup W_2) \cap W_-(P_2')), P_2' \subset W_2$$

(72)

あるいは

$$P_1' \subset ((W_3 \cup W_4) \cap W_+(P_2')), P_2' \subset W_3$$

(73)

である．さらに，点  $Q$  がバッファ領域  $BL(L', b)$  に含まれるための条件は，

$$P_1' \subset (W_1 \cup W_2), P_2' \subset (W_3 \cup W_4)$$

(74)

あるいは

$$P_1' \subset (W_3 \cup W_4), P_2' \subset (W_1 \cup W_2)$$

(75)

である．以上の条件を全て合わせると，

$$P_1' \subset (W_1 \cup W_2 \cup W_3), P_2' \subset (W_2 \cup W_3 \cup W_4)$$

(76)

あるいは

$$P_1' \subset (W_2 \cup W_3 \cup W_4), P_2' \subset (W_1 \cup W_2 \cup W_3)$$

(77)

が，点  $Q$  が  $B(L', b)$  に含まれるための条件である．変数  $u_1', u_2'$  の変域で表現すると，

$$u_1' \leq u_0 + \sqrt{b^2 - (w - v_0)^2}, u_0 - \sqrt{b^2 - (w - v_0)^2} \leq u_2'$$

(78)

あるいは

$$u_0 - \sqrt{b^2 - (w - v_0)^2} \leq u_1', u_2' \leq u_0 + \sqrt{b^2 - (w - v_0)^2}$$

(79)

である．

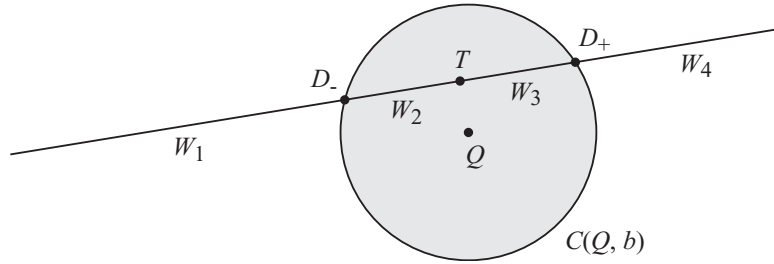


図 17 直線  $v=w$  上の 4 つの区間  $W_1, W_2, W_3, W_4$

従って式(67)は,

$$\Pr[Q \in B(L', b)] = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_{v_0-b}^{v_0+b} \left\{ \int_{u_0-\sqrt{b^2-(w-v_0)^2}}^{\infty} \int_{-\infty}^{u_0+\sqrt{b^2-(w-v_0)^2}} |u_1' - u_2'| g(u_1', u_2', w, \theta) du_1' du_2' \right. \\ \left. + \int_{-\infty}^{u_0-\sqrt{b^2-(w-v_0)^2}} \int_{u_0+\sqrt{b^2-(w-v_0)^2}}^{\infty} |u_1' - u_2'| g(u_1', u_2', w, \theta) du_1' du_2' \right\} dw d\theta$$

(80)

と書き換えられる。

### 2.3 数値計算例

式(58)及び式(79)の評価には, 4 重積分の数値計算が必要であり, 操作性が高いとは言えない。しかしながら, 確率密度関数  $f(x_1, y_1, x_2, y_2)$  の形によっては, 点  $Q$  が  $B(L', b)$  に含まれる確率は比較的容易に計算することができる。以下, 前節と同様に, 線分  $L$  の両端点がそれぞれ独立に一様分布に従う場合を取り上げ, 具体的な計算方法を与える。

いま, 2 点  $P_1, P_2$  の位置データは, 各正位置を中心とする半径  $r$  ( $r < b < l$  を仮定) の円  $C(P_1, r), C(P_2, r)$  内で定義される一様分布に従ってそれぞれ独立に分布するものと仮定する (図 18)。

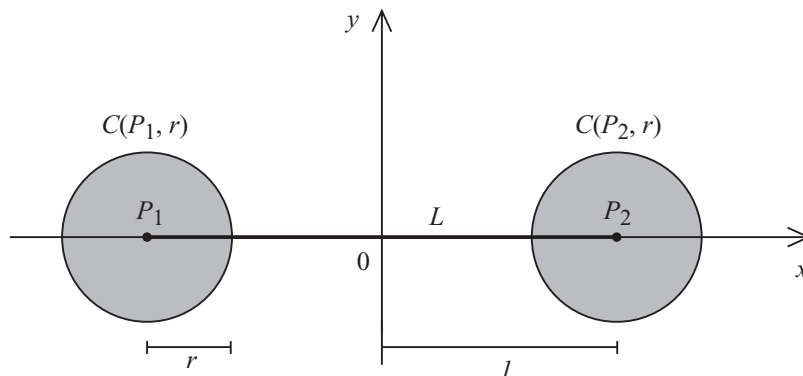


図 18 2 点  $P_1, P_2$  の分布領域

この場合, 常に  $x_1 < x_2$  であるから, 線分  $P_1'P_2'$  が  $C(Q, b)$  と交点を持つような  $P_2'$  の位置はより簡単な形で表される。

再び図 8 に従い, 円  $C(Q, b)$  によって領域を 3 つに分割する. なお,  $y_2$  の変域は  $l-r \leq x_2 \leq l+r$  においてのみ

$$-\sqrt{r^2 - (x_2 - l)^2} \leq y_2 \leq \sqrt{r^2 - (x_2 - l)^2}$$

(81)

と定義される.

1.  $P_1' \subset D_1, P_2' \subset D_2$  の場合

この場合,  $y_2$  の変域  $\{y_{2\min}, y_{2\max}\}$  は以下の式で与えられる (図 9).  $y_0 \leq y_1$  の時には

$$\{y_{2\min}, y_{2\max}\} = \begin{cases} \left\{ y_0 - \sqrt{b^2 - (x_2 - x_0)^2}, y_0 + \sqrt{b^2 - (x_2 - x_0)^2} \right\} & (x_0 - b \leq x_2 \leq x_R) \\ \left\{ y_{2R}, y_0 + \sqrt{b^2 - (x_2 - x_0)^2} \right\} & (x_R < x_2 \leq x_L) \\ \{y_{2R}, y_{2L}\} & (x_L < x_2 \leq x_0 + b) \end{cases}$$

(82)

また  $y_1 < y_0$  の時には

$$\{y_{2\min}, y_{2\max}\} = \begin{cases} \left\{ y_0 - \sqrt{b^2 - (x_2 - x_0)^2}, y_0 + \sqrt{b^2 - (x_2 - x_0)^2} \right\} & (x_0 - b \leq x_2 \leq x_L) \\ \left\{ y_0 - \sqrt{b^2 - (x_2 - x_0)^2}, y_{2L} \right\} & (x_L < x_2 \leq x_R) \\ \{y_{2R}, y_{2L}\} & (x_R < x_2 \leq x_0 + b) \end{cases}$$

(83)

である.

2.  $P_1' \subset D_1, P_2' \subset D_3$  の場合

この場合,  $y_2$  の変域  $\{y_{2\min}, y_{2\max}\}$  は

$$\{y_{2\min}, y_{2\max}\} = \{y_{2R}, y_{2L}\}$$

(84)

である .

3.  $P_1' \subset D_2, P_2' \subset D_2$  の場合

$y_0 \leq y_1$  の時には

$$\{y_{2\min}, y_{2\max}\} = \begin{cases} \{-\infty, y_{2R}\} & x_0 - b \leq x_2 \leq x_R \\ \{-\infty, y_0 + \sqrt{b^2 - (x_2 - x_0)^2}\} & x_R < x_2 \leq x_L \\ \{-\infty, y_{2L}\} & x_L < x_2 \leq x_0 + b \end{cases}$$

(85)

であり ,  $y_1 < y_0$  の時には

$$\{y_{2\min}, y_{2\max}\} = \begin{cases} \{y_{2L}, \infty\} & x_0 - b \leq x_2 \leq x_L \\ \{y_0 - \sqrt{b^2 - (x_2 - x_0)^2}, \infty\} & x_L < x_2 \leq x_R \\ \{y_{2R}, \infty\} & x_R < x_2 \leq x_0 + b \end{cases}$$

(86)

となる .

4.  $P_1' \subset D_2, P_2' \subset D_3$  の場合

$y_0 \leq y_1$  の時には

$$\{y_{2\min}, y_{2\max}\} = \{-\infty, y_{2L}\}$$

(87)

$y_1 < y_0$  の時には ,

$$\{y_{2\min}, y_{2\max}\} = \{y_{2R}, \infty\}$$

(88)

であることがわかる .

上の結果をまとめると ,

1.  $x_1 \leq x_0 - b, x_0 - b \leq x_2$  の場合

この場合 ,  $y_0 \leq y_1$  の時には

$$\{y_{2\min}, y_{2\max}\} = \begin{cases} \left\{ y_0 - \sqrt{b^2 - (x_2 - x_0)^2}, y_0 + \sqrt{b^2 - (x_2 - x_0)^2} \right\} & (x_0 - b \leq x_2 \leq x_R) \\ \left\{ y_{2R}, y_0 + \sqrt{b^2 - (x_2 - x_0)^2} \right\} & (x_R < x_2 \leq x_L) \\ \{y_{2R}, y_{2L}\} & (x_L < x_2) \end{cases}$$

(89)

であり ,  $y_1 < y_0$  の時には

$$\{y_{2\min}, y_{2\max}\} = \begin{cases} \left\{ y_0 - \sqrt{b^2 - (x_2 - x_0)^2}, y_0 + \sqrt{b^2 - (x_2 - x_0)^2} \right\} & (x_0 - b \leq x_2 \leq x_L) \\ \left\{ y_0 - \sqrt{b^2 - (x_2 - x_0)^2}, y_{2L} \right\} & (x_L < x_2 \leq x_R) \\ \{y_{2R}, y_{2L}\} & (x_R < x_2) \end{cases}$$

(90)

となる .

2.  $x_0 - b \leq x_1 \leq x_0 + b, x_0 - b \leq x_2$  の場合

$y_0 \leq y_1$  の時には

$$\{y_{2\min}, y_{2\max}\} = \begin{cases} \{ -\infty, y_{2R} \} & x_0 - b \leq x_2 \leq x_R \\ \left\{ -\infty, y_0 + \sqrt{b^2 - (x_2 - x_0)^2} \right\} & x_R < x_2 \leq x_L \\ \{ -\infty, y_{2L} \} & x_L < x_2 \end{cases}$$



(91)

であり,  $y_1 < y_0$  の時には

$$\{y_{2\min}, y_{2\max}\} = \begin{cases} \{y_{2L}, \infty\} & x_0 - b \leq x_2 \leq x_L \\ \left\{y_0 - \sqrt{b^2 - (x_2 - x_0)^2}, \infty\right\} & x_L < x_2 \leq x_R \\ \{y_{2R}, \infty\} & x_R < x_2 \end{cases}$$

(92)

となる. なおここで,  $x_R, x_L$  はそれぞれ式(33), (34)で与えられるが,  $y_{2R}, y_{2L}$  は

$$y_{2R} = \frac{(x_0 - x_1) \left\{ (y_0 - y_1)x_2 + (x_0 y_1 - x_1 y_0) \right\} - b^2 y_1}{-b^2 + (x_0 - x_1)^2} - \operatorname{sgn}(x_0 - x_1) \frac{b(x_1 - x_2) \sqrt{-b^2 + (x_0 - x_1)^2 + (y_0 - y_1)^2}}{-b^2 + (x_0 - x_1)^2}$$

(93)

$$y_{2L} = \frac{(x_0 - x_1) \left\{ (y_0 - y_1)x_2 + (x_0 y_1 - x_1 y_0) \right\} - b^2 y_1}{-b^2 + (x_0 - x_1)^2} + \operatorname{sgn}(x_0 - x_1) \frac{b(x_1 - x_2) \sqrt{-b^2 + (x_0 - x_1)^2 + (y_0 - y_1)^2}}{-b^2 + (x_0 - x_1)^2}$$

(94)

となる.

上の結果をまとめると, 式(58)は

$$\Pr[Q \in B(L', b)] = \frac{1}{\pi^2 r^4} \int_{-l-r}^{-l+r} \int_{-\sqrt{r^2 - (x_1+l)^2}}^{\sqrt{r^2 - (x_1+l)^2}} \int_{-l-r}^{l+r} \max \left\{ \left\{ \min \left\{ y_{2\max}, \sqrt{r^2 - (x_2+l)^2} \right\} - \max \left\{ y_{2\min}, \sqrt{r^2 - (x_2+l)^2} \right\} \right\}, 0 \right\} dx_2 dy_1 dx_1$$

(95)

となる. さらに, 被積分関数は積分領域内において  $x_2$  の区分的一次関数であるので, 式(95)は

$$\begin{aligned} \Pr[Q \in B(L', b)] &= \frac{1}{\pi^2 r^4} \int_{-l-r}^{-l+r} \int_{-\sqrt{r^2 - (x_1+l)^2}}^{\sqrt{r^2 - (x_1+l)^2}} \int_{-l-r}^{l+r} \left\{ \eta(x_1, y_1) x_2 + \nu(x_1, y_1) \right\} dx_2 dy_1 dx_1 \\ &= \frac{1}{\pi^2 r^4} \int_{-l-r}^{-l+r} \int_{-\sqrt{r^2 - (x_1+l)^2}}^{\sqrt{r^2 - (x_1+l)^2}} \left[ \frac{1}{2} \eta(x_1, y_1) x_2^2 + \nu(x_1, y_1) x_2 \right]_{-l-r}^{l+r} dy_1 dx_1 \end{aligned}$$

(96)

となり，2重積分の数値計算によって評価できることが分かる．

バッファ領域  $B(L, b)$  の欠落率の期待値  $\gamma_0$  は，式(96)の値を全領域  $R$  で積分すれば計算することができる．即ち，

$$\begin{aligned} \gamma_0 &= E[A(B(L, b) \setminus B(L', b))] \\ &= \frac{\int_{z \in B(L, b)} (1 - \Pr[Q \in B(L', b)]) dz}{A(B(L, b))} \\ &= 1 - \frac{\int_{z \in B(L, b)} \Pr[Q \in B(L', b)] dz}{4\pi b^2 + 4bl} \end{aligned}$$

(97)

で与えられる．

上の計算は，変数変換を用いた場合についても同様に行うことができる．この場合，まず角度  $\theta$  の変域は

$$\Theta = \left[ -\sin^{-1} \frac{r}{l}, \sin^{-1} \frac{r}{l} \right]$$

(98)

である (図 19)．

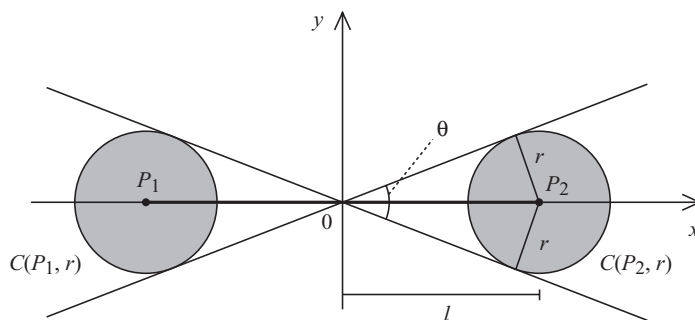


図 19 角度  $\theta$  の変域

また，角度  $\theta$  を所与としたときに， $C(Q, b)$  と交点を持つ直線  $W: v=w$  の範囲は

$$W(\theta) = \left[ -r - l|\sin \theta|, r + l|\sin \theta| \right]$$

(99)

である (図 20).

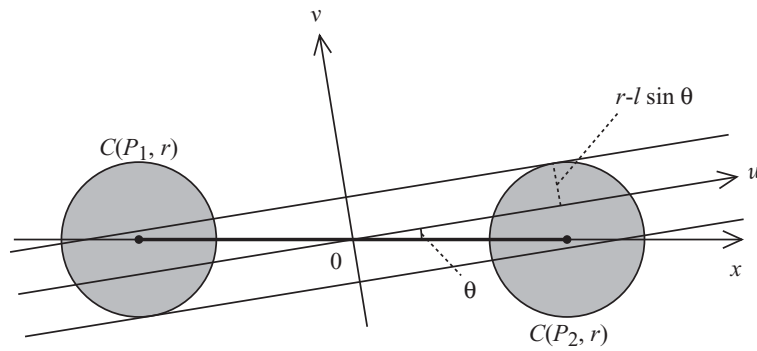


図 20  $C(Q, b)$ と交点を持つ直線  $W: v=w$  の範囲

次に,  $u_1', u_2'$ の変域を考える. 角度 $\theta$ と $v$ 軸方向の高さ  $v=w$  を所与とし, 直線  $v=w$  と円  $C(P_1, r), C(P_2, r)$ との各交点を  $u_1'$ 座標値の小さいものからそれぞれ  $E_{1-}, E_{1+}, E_{2-}, E_{2+}$ と表す (図 21)

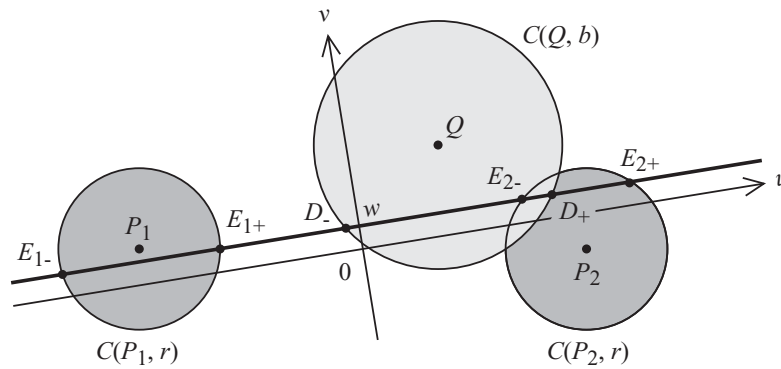


図 21 変数  $u_1', u_2'$ の変域

点  $E_{1-}, E_{1+}, E_{2-}, E_{2+}$ の  $u_1'$ 座標値はそれぞれ,

$$\begin{aligned} e_{1-} &= -l \cos \theta - \sqrt{r^2 - (w - l \sin \theta)^2} \\ e_{1+} &= -l \cos \theta + \sqrt{r^2 - (w - l \sin \theta)^2} \\ e_{2-} &= l \cos \theta - \sqrt{r^2 - (w - l \sin \theta)^2} \\ e_{2+} &= l \cos \theta + \sqrt{r^2 - (w - l \sin \theta)^2} \end{aligned}$$

(100)

であり, ここから  $u_1', u_2'$ の存在可能範囲が

$$\begin{aligned}
U_1(w, \theta) &= \left[ -l \cos \theta - \sqrt{r^2 - (w - l \sin \theta)^2}, -l \cos \theta + \sqrt{r^2 - (w - l \sin \theta)^2} \right] \\
U_2(w, \theta) &= \left[ l \cos \theta - \sqrt{r^2 - (w - l \sin \theta)^2}, l \cos \theta + \sqrt{r^2 - (w - l \sin \theta)^2} \right]
\end{aligned}
\tag{101}$$

と得られる .

上で求めた  $u_1', u_2', w, \theta$  の存在可能範囲は 図 18 にある 2 円  $C(P_1, r), C(P_2, r)$  によって定義される範囲と同等であり , その内部では確率密度関数  $g(u_1', u_2', w, \theta)$  の値は一定であり , その積分値は 1 である . また ,  $C(P_1, r), C(P_2, r)$  によって定義される領域の大きさは  $\pi^2 r^4$  であるから ,

$$g(u_1', u_2', w, \theta) = \begin{cases} \frac{1}{\pi^2 r^4} & u_1' \in U_1(w, \theta), u_2' \in U_2(w, \theta), w \in W(\theta), \theta \in \Theta \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}
\tag{102}$$

である .

式(80)は , 上の領域に限定して積分を行うことで , より簡単に計算することができる . まず角度  $\theta$  については , 式(80)における積分範囲

$$\theta \in \left[ -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right]
\tag{103}$$

と式(98)の範囲を合わせ , その積分範囲は

$$\theta \in \left[ -\sin^{-1} \frac{r}{l}, \sin^{-1} \frac{r}{l} \right]
\tag{104}$$

である . 次に角度  $\theta$  を所与とすると ,  $w$  の変域は式(68)と式(99)の共通部分となる . 従って

$$w_{\min} = \max \{ v_0 - b, -r - l |\sin \theta| \}
\tag{105}$$

$$w_{\max} = \min \{v_0 + b, r + l |\sin \theta|\} \quad (106)$$

とおくと,  $w$  の積分範囲は

$$w \subset [w_{\min}, w_{\max}] \quad (107)$$

となる. さらに, 角度  $\theta$  と  $w$  を所与とすると, 式(101)で与えられる  $u_1', u_2'$  の存在可能範囲と, 点  $Q$  がバッファ領域  $BL(L', b)$  に含まれる, 即ち, 線分  $P_1'P_2'$  が円  $C(Q, b)$  と交点を持つような範囲

$$\begin{aligned} U_1'[w, \theta] &= \left( -\infty, u_0 + \sqrt{b^2 - (w - v_0)^2} \right] \\ U_2'[w, \theta] &= \left[ u_0 - \sqrt{b^2 - (w - v_0)^2}, \infty \right) \end{aligned} \quad (108)$$

を合わせることで,  $u_1', u_2'$  の積分範囲が決定される. 即ち,

$$\begin{aligned} u_{1\min}' &= -l \cos \theta - \sqrt{r^2 - (w - l \sin \theta)^2} \\ u_{1\max}' &= \min \left\{ -l \cos \theta + \sqrt{r^2 - (w - l \sin \theta)^2}, u_0 + \sqrt{b^2 - (w - v_0)^2} \right\} \\ u_{2\min}' &= \max \left\{ l \cos \theta - \sqrt{r^2 - (w - l \sin \theta)^2}, u_0 - \sqrt{b^2 - (w - v_0)^2} \right\} \\ u_{2\max}' &= l \cos \theta + \sqrt{r^2 - (w - l \sin \theta)^2} \end{aligned} \quad (109)$$

として,

$$\begin{aligned} u_1' &\subset U_1(w, \theta) \cap U_1'(w, \theta) = [u_{1\min}', u_{1\max}'] \\ u_2' &\subset U_2(w, \theta) \cap U_2'(w, \theta) = [u_{2\min}', u_{2\max}'] \end{aligned} \quad (110)$$

である. 但しここで,  $u_{1\max}' < u_{1\min}'$  あるいは  $u_{2\max}' < u_{2\min}'$  の場合には,  $u_1'$  及び  $u_2'$  の変域はないものとみなす.

上記積分範囲内では，確率密度関数  $g(u_1', u_2', w, \theta)$  は式(102)で与えられるので，式(80)は

$$\Pr[Q \in B(L', b)] = \frac{1}{\pi^2 r^4} \int_{-\sin^{-1} \frac{r}{l}}^{\sin^{-1} \frac{r}{l}} \int_{w_{\min}}^{w_{\max}} \int_{u_{2\min}'}^{u_{2\max}'} \int_{u_{1\min}'}^{u_{1\max}'} (u_2' - u_1') du_1' du_2' dw d\theta \quad (111)$$

と書き換えられる．但しここで， $u_{1\max}' < u_{1\min}'$  あるいは  $u_{2\max}' < u_{2\min}'$  の場合には， $u_1'$  及び  $u_2'$  による積分は行わないものとする．さらに，

$$\int_{u_{2\min}'}^{u_{2\max}'} \int_{u_{1\min}'}^{u_{1\max}'} (u_2' - u_1') du_1' du_2' = \frac{1}{2} (u_{1\max}' - u_{1\min}') (u_{2\max}' - u_{2\min}') (u_{1\max}' + u_{1\min}' - u_{2\max}' + u_{2\min}') \quad (112)$$

であるので，式(111)は

$$\begin{aligned} \Pr[Q \in B(L', b)] &= \frac{1}{\pi^2 r^4} \int_{-\sin^{-1} \frac{r}{l}}^{\sin^{-1} \frac{r}{l}} \int_{w_{\min}}^{w_{\max}} \int_{u_{2\min}'}^{u_{2\max}'} \int_{u_{1\min}'}^{u_{1\max}'} (u_2' - u_1') du_1' du_2' dw d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi^2 r^4} \int_{-\sin^{-1} \frac{r}{l}}^{\sin^{-1} \frac{r}{l}} \int_{w_{\min}}^{w_{\max}} (u_{1\max}' - u_{1\min}') (u_{2\max}' - u_{2\min}') (u_{1\max}' + u_{1\min}' - u_{2\max}' + u_{2\min}') dw d\theta \end{aligned} \quad (113)$$

となり， $w$  及び  $\theta$  による二重積分の数値計算で評価することができることが分かる．

バッファ領域  $B(L, b)$  の欠落率の期待値  $\gamma_0$  は，式(113)の値を全領域  $R$  で積分すれば計算することができる．即ち，

$$\begin{aligned} \gamma_0 &= E[A(B(L, b) \setminus B(L', b))] \\ &= \frac{\int_{\mathbf{z} \in B(L, b)} (1 - \Pr[Q \in B(L', b)]) d\mathbf{z}}{A(B(L, b))} \\ &= 1 - \frac{\int_{\mathbf{z} \in B(L, b)} \Pr[Q \in B(L', b)] d\mathbf{z}}{4\pi b^2 + 4bl} \end{aligned} \quad (114)$$

で与えられる．

以下，式(97)を用いた具体的な数値計算例を示す．前節と同様に，ここでも一般性を損なわずに  $b=1$  と置き，欠落率の期待値  $\gamma_0$  を  $r$  及び  $l$  の関数とみなす．

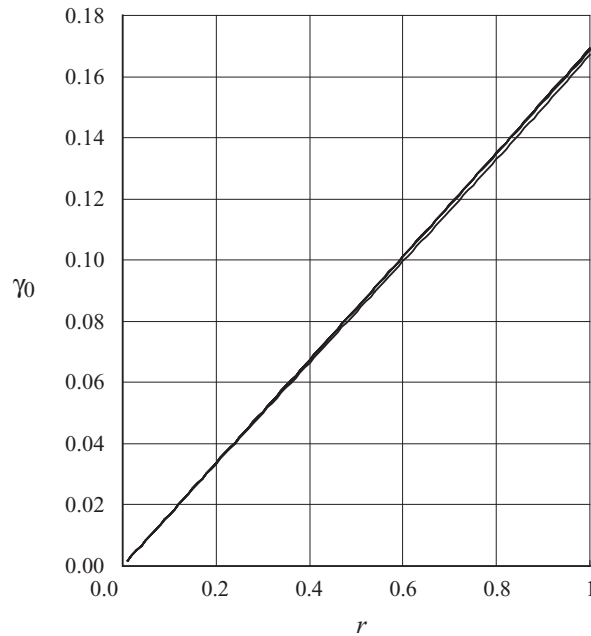


図 22 点の位置誤差  $r$  及び線分  $L$  の長さ  $l$  と欠落率  $\gamma_0$  の関係 . グラフには  $l=1 \sim 100$  のときの関係を重ねて描いてある .

図 22 は ,  $l=1 \sim 100$  のときの点の位置誤差  $r$  と欠落率  $\gamma_0$  の関係を示したものである . この図から明らかとおり , 線分長  $l$  は欠落率  $\gamma_0$  にはほとんど影響しないことが分かる . 即ち , 点の位置誤差  $r$  はバッファ半径  $b$  との相対的な大小関係によってほとんど決定され , 線分長には依存しない . このことは , 以下のように考えると直感的に理解することができる . 図 23 は , 長さの異なる 2 つの線分において , 両端点がいずれも同様の位置誤差を生じている場合におけるバッファ領域の齟齬を示したものである . 線分がある程度長い場合 , 欠落率  $\gamma_0$  はこの図からも明らかのように , 主にバッファ領域  $BL(L, b)$  と  $BL(L', b)$  の齟齬 ( 図中の濃灰色領域 ) によって決定される . ところが , この 2 つの領域の齟齬の  $BL(L, b)$  に対する割合は , その面積を線分  $L$  に並行な方向で積分することによって求めれば明らかとおり , 線分長  $l$  にはほとんど影響されない . 従って , 点の位置誤差  $r$  はバッファ半径  $b$  との相対的な大小関係によって決定されると言って良い .

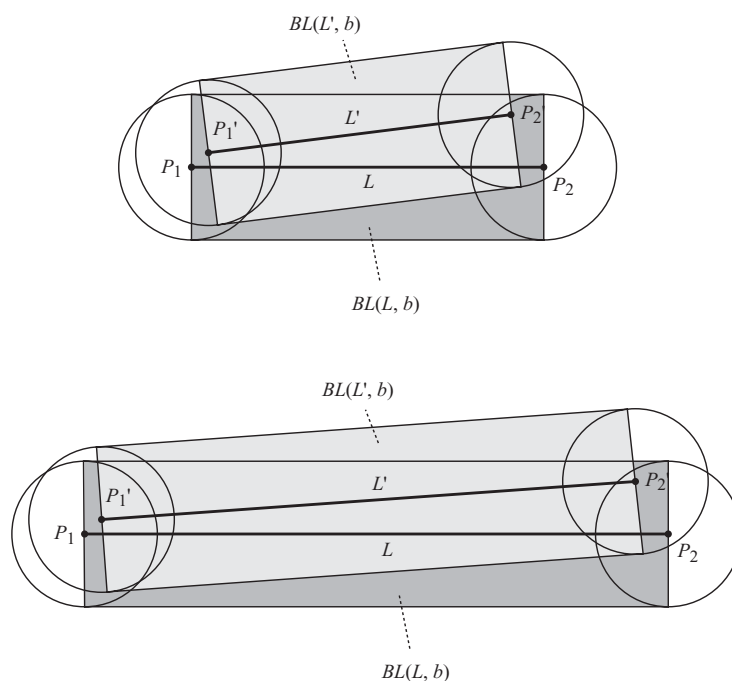


図 23 長さの異なる 2 つの線分において、両端点がいずれも同様の位置誤差を生じている場合におけるバッファ領域の齟齬

そこで、点の位置誤差  $r$  と欠落率  $\gamma_0$  の関係に着目すると、図 22 を見る限り、線形関係があるように思われる。そこで欠落率  $\gamma_0$  を被説明変数、位置誤差  $r$  を説明変数とする回帰分析を行うと、

$$\begin{aligned} \gamma_0 &= 0.1674r \quad (l=2) \\ \gamma_0 &= 0.1695r \quad (l=10) \\ \gamma_0 &= 0.1698r \quad (l=100) \end{aligned}$$

(115)

という結果を得、いずれも回帰自体は有意水準 1% で有意となる。従って、単一の点に対するバッファリングと同様、線分に対するバッファリング誤差も、点の位置誤差  $r$  に反比例すると言って良いであろう。

#### 参考文献

- Bolstad, P. V., Gessler, P., and Lillesand, T. M. (1990): "Positional uncertainty in manually digitized map data", *International Journal of Geographical Information Systems*, **4**, 399-412.
- Burrough, P. A. and McDonnell, R. A. (1998): *Principles of Geographical Information Systems*. New York: Oxford University Press.
- De Genst, W. and Canters, F. (2000): "Handling uncertainty propagation through the buffer operation in a raster environment" In *Proceedings of Accuracy 2000*, Delft: University Press, pp. 145-152.



- Leung, Y. and Yan, J. P. (1998): "A locational error model for spatial features", *International Journal of Geographical Information Science*, **12**, 607-620.
- Shi, W. Z. (1998): "A generic statistical approach for modelling errors of geometric features in GIS", *International Journal of Geographical Information Science*, **12**, 131-143.
- Shi, W., Cheung, C. K. and Zhu, C. (2003): "Modelling error propagation in vector-based buffer analysis", *International Journal of Geographical Information Science*, **17**, 251-271.
- Veregin, H. (1994): "Integration of simulation modelling and error propagation for the buffer operation in GIS", *Photogrammetric Engineering and Remote Sensing*, **60**, 251-271.
- Veregin, H. (1996): "Error propagation through the buffer operation for probability surfaces", *Photogrammetric Engineering and Remote Sensing*, **62**, 419-428.